

Dessiner un graphe dans le plan

Eric Fusy (LIX, Ecole Polytechnique)

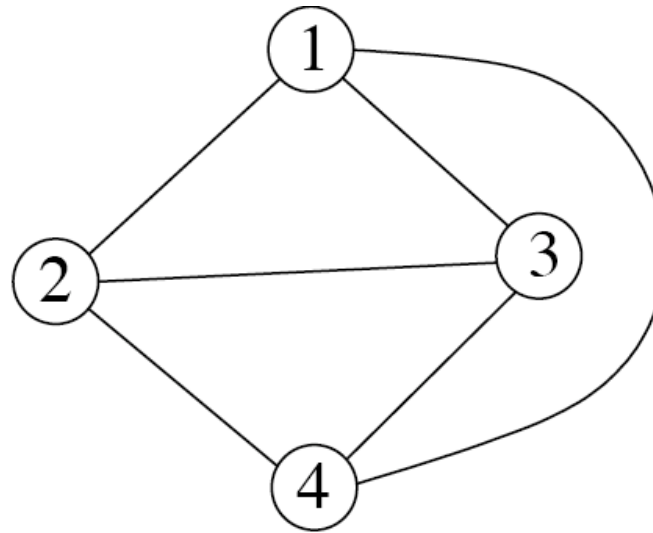
Séminaire SIESTE, mardi 16 novembre 2010

Partie I: graphes planaires

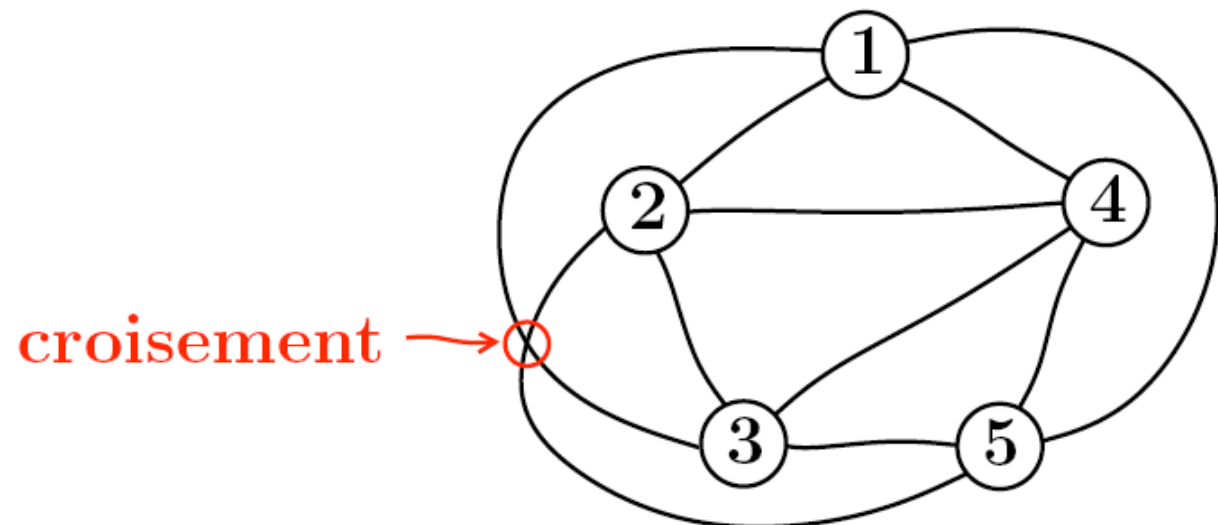
Définition des graphes planaires

- Un graphe $G=(V,E)$ est dit **planaire** si on peut le dessiner dans le plan **sans que deux arêtes se croisent**

K_4 est planaire

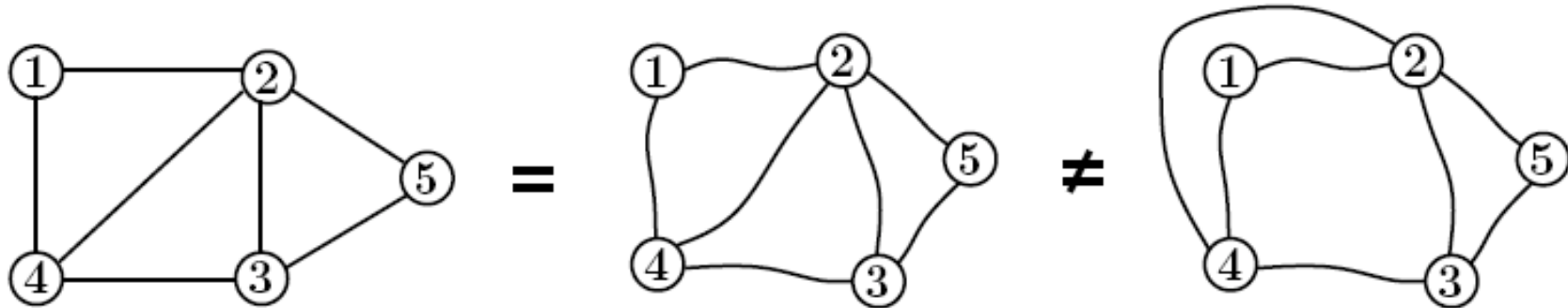


K_5 n'est pas planaire



Plongements, cartes planaires

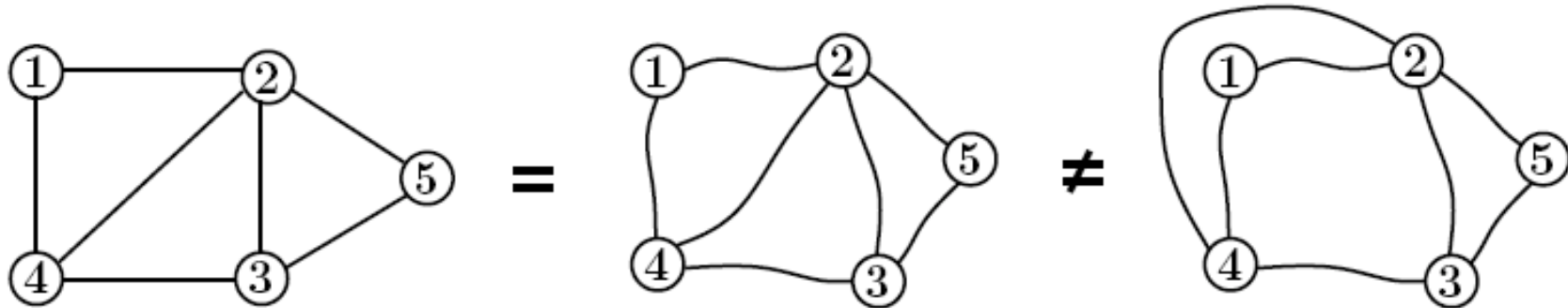
- **Plongement** planaire = dessin planaire **modulo isotopie**
(encodé par **ordre cyclique** des voisins autour de chaque sommet)



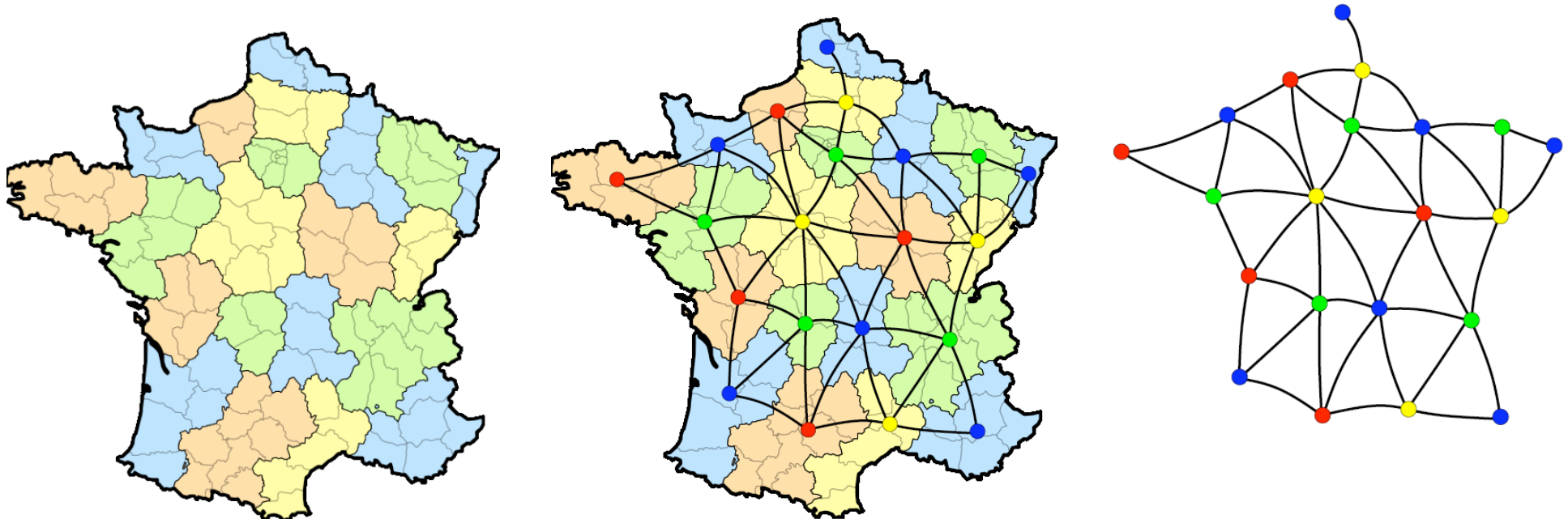
Carte planaire = graphe muni d'un **plongement planaire**

Plongements, cartes planaires

- **Plongement** planaire = dessin planaire **modulo isotopie**
(encodé par **ordre cyclique** des voisins autour de chaque sommet)



Carte planaire = graphe muni d'un **plongement planaire**
(cf cartes géographiques, **théorème des 4 couleurs**)



Deux étapes pour le dessin

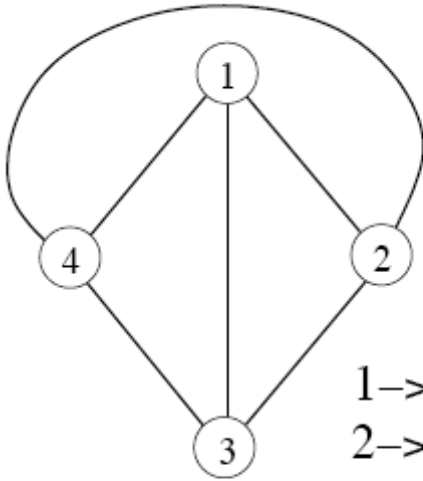
- 1) avant de dessiner un graphe planaire, il faut déjà
lui trouver un plongement planaire (problème combinatoire)

Deux étapes pour le dessin

1) avant de dessiner un graphe planaire, il faut déjà

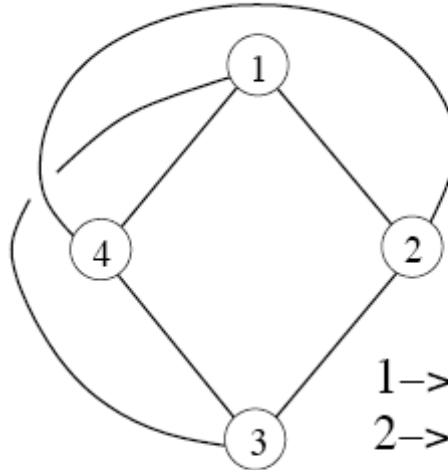
lui trouver un plongement planaire (problème combinatoire)

Ex: deux plongements différents pour K_4

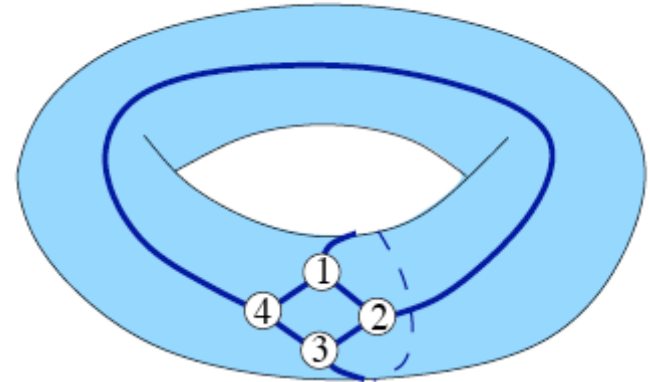


planaire

1 $\rightarrow$ (2,3,4)
2 $\rightarrow$ (1,4,3)
3 $\rightarrow$ (1,2,4)
4 $\rightarrow$ (1,3,2)



1 $\rightarrow$ (2,4,3)
2 $\rightarrow$ (1,4,3)
3 $\rightarrow$ (1,4,2)
4 $\rightarrow$ (1,3,2)



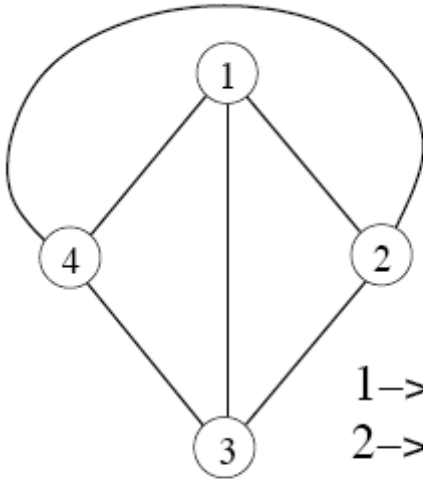
sur le tore

Deux étapes pour le dessin

1) avant de dessiner un graphe planaire, il faut déjà

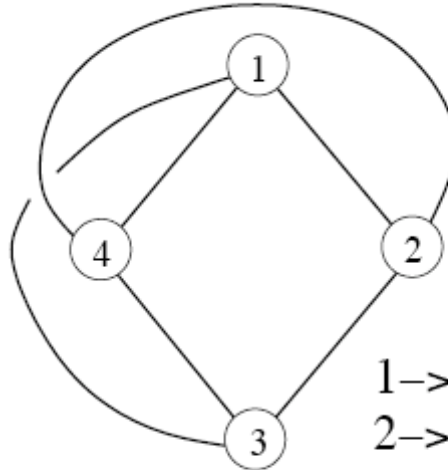
lui trouver un plongement planaire (problème combinatoire)

Ex: deux plongements différents pour K_4

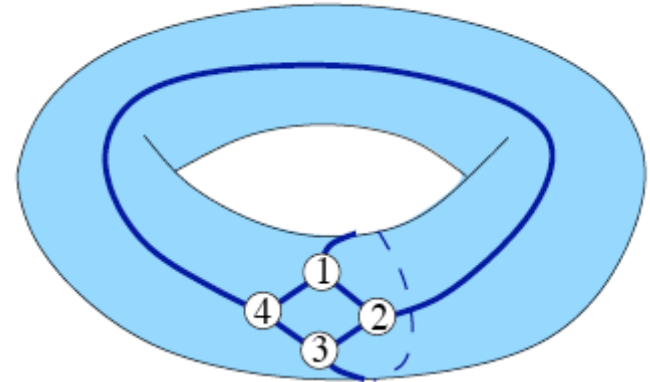


1 $\rightarrow$ (2,3,4)
2 $\rightarrow$ (1,4,3)
3 $\rightarrow$ (1,2,4)
4 $\rightarrow$ (1,3,2)

planaire



1 $\rightarrow$ (2,4,3)
2 $\rightarrow$ (1,4,3)
3 $\rightarrow$ (1,4,2)
4 $\rightarrow$ (1,3,2)



sur le tore

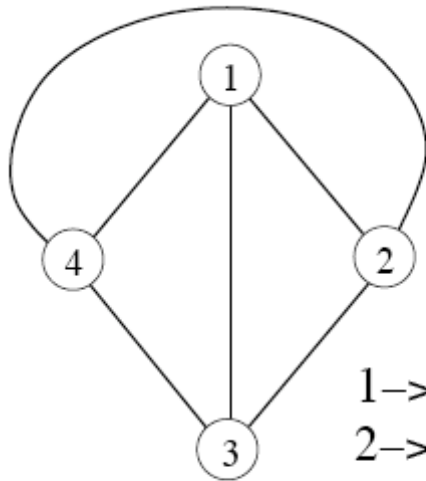
Algorithmes en $O(n)$: [Hopcroft-Tarjan'74], [De Fraysseix-Mendez'06]

Deux étapes pour le dessin

1) avant de dessiner un graphe planaire, il faut déjà

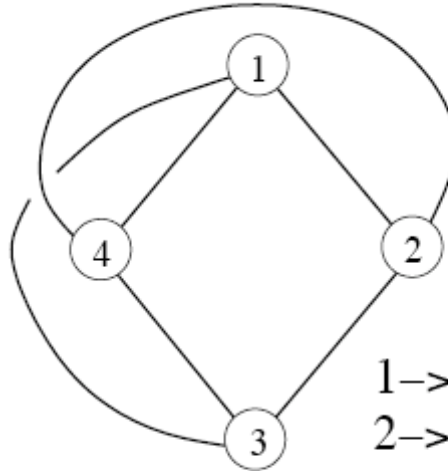
lui trouver un **plongement planaire** (**problème combinatoire**)

Ex: deux plongements différents pour K_4

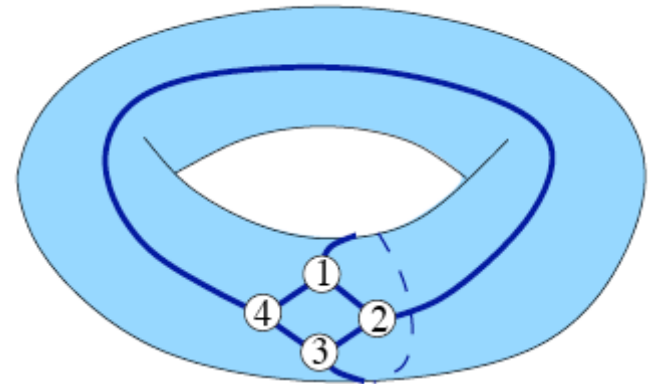


1→(2,3,4)
2→(1,4,3)
3→(1,2,4)
4→(1,3,2)

planaire



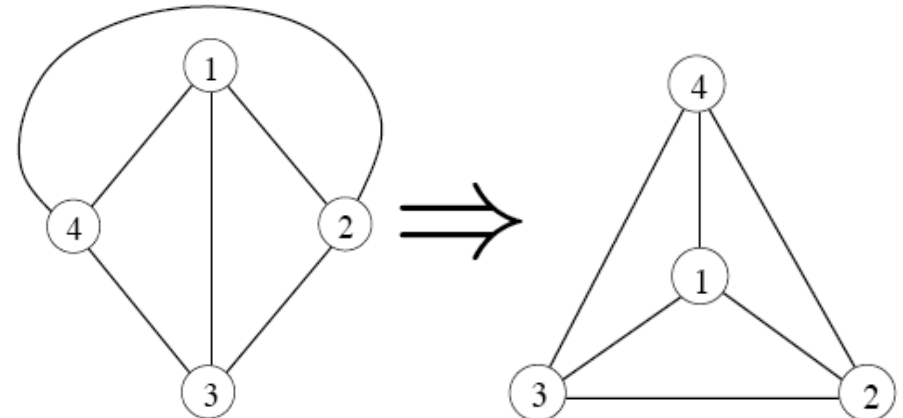
1→(2,4,3)
2→(1,4,3)
3→(1,4,2)
4→(1,3,2)



sur le tore

Algorithmes en $O(n)$: [Hopcroft-Tarjan'74], [De Fraysseix-Mendez'06]

2) Puis on **trouve un dessin**
correspondant au plongement
(**problème géométrique**)

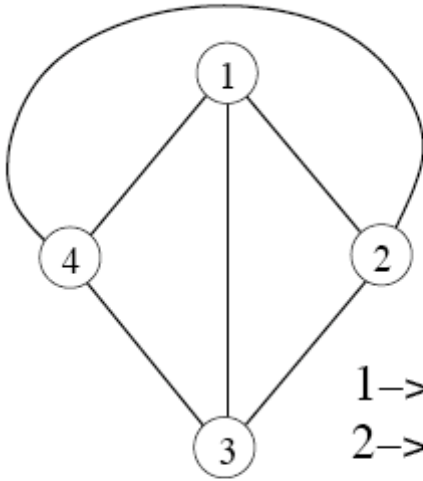


Deux étapes pour le dessin

1) avant de dessiner un graphe planaire, il faut déjà

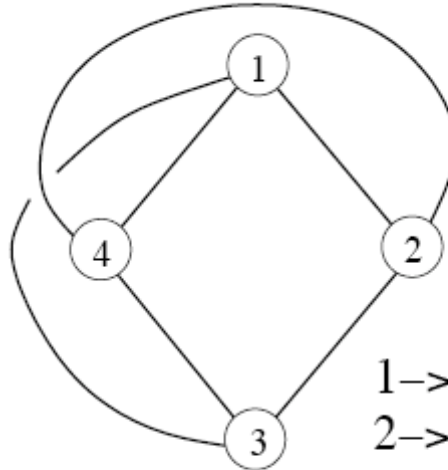
lui trouver un **plongement planaire** (**problème combinatoire**)

Ex: deux plongements différents pour K_4

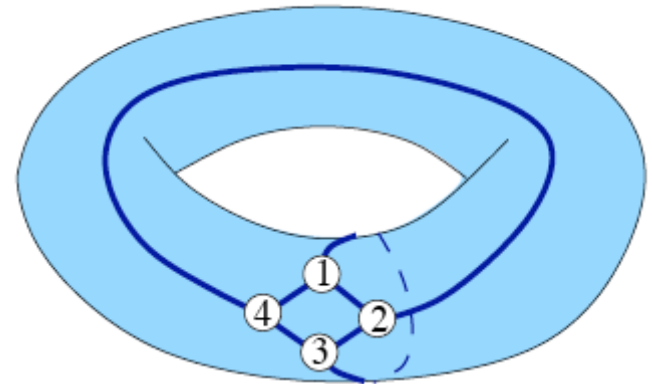


1→(2,3,4)
2→(1,4,3)
3→(1,2,4)
4→(1,3,2)

planaire



1→(2,4,3)
2→(1,4,3)
3→(1,4,2)
4→(1,3,2)

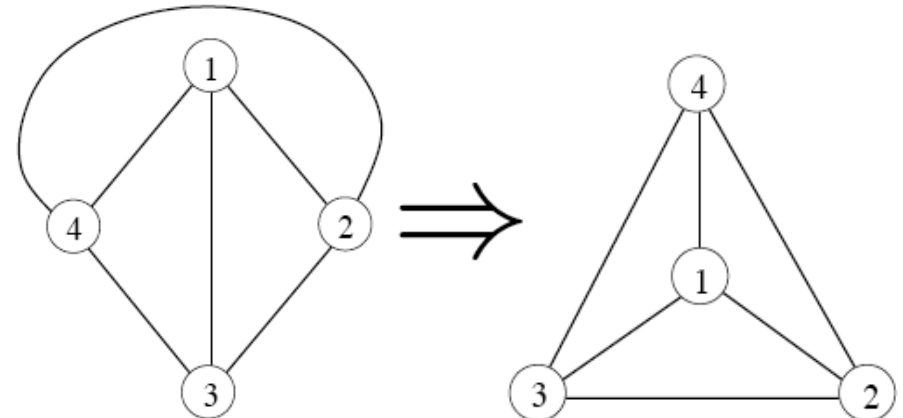


sur le tore

Algorithmes en $O(n)$: [Hopcroft-Tarjan'74], [De Fraysseix-Mendez'06]

2) Puis on **trouve un dessin**
correspondant au plongement
(**problème géométrique**)

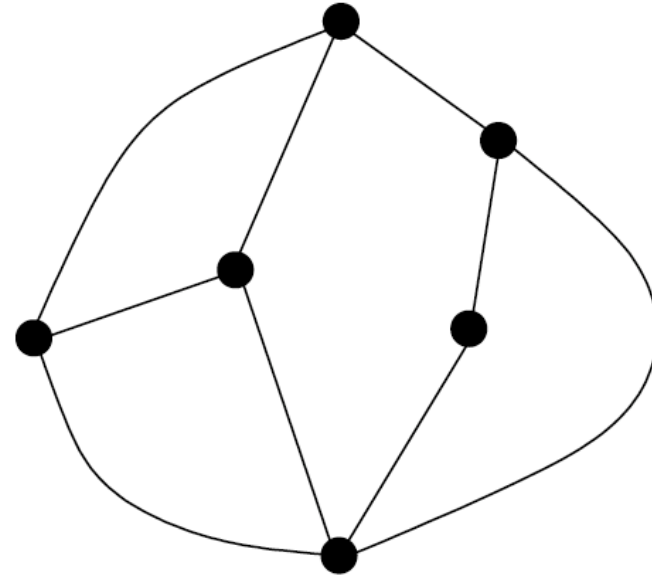
Nous nous concentrons sur 2)



Relation d'Euler

- Soit $C=(V,E,F)$ une carte planaire. Alors

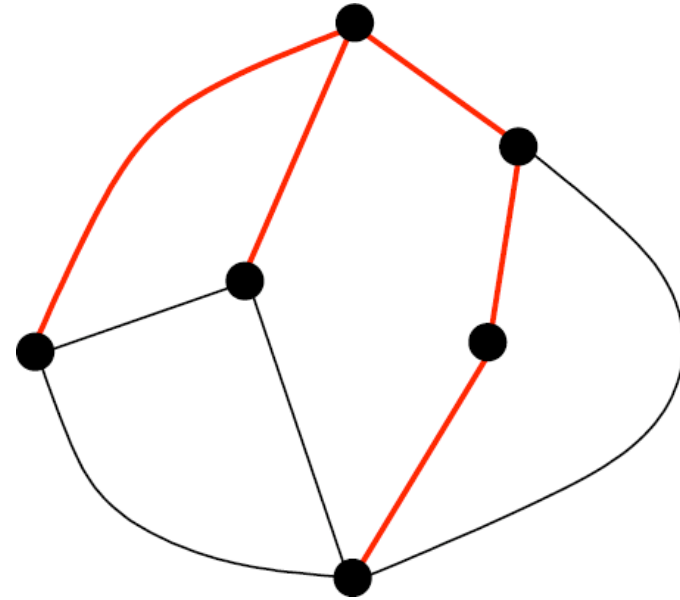
$$|V| - |E| + |F| = 2$$



Relation d'Euler

- Soit $C=(V,E,F)$ une carte planaire. Alors

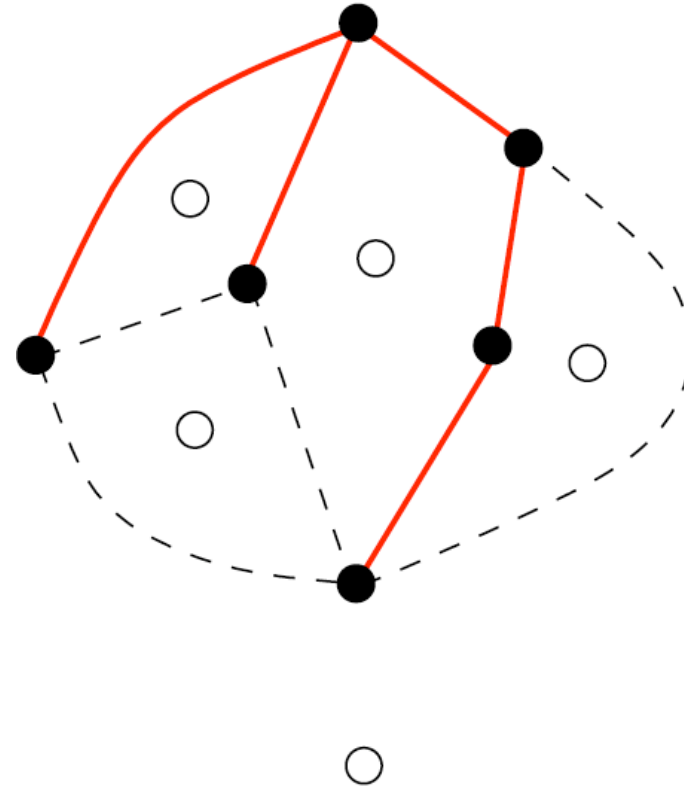
$$|V| - |E| + |F| = 2$$



Relation d'Euler

- Soit $C=(V,E,F)$ une carte planaire. Alors

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

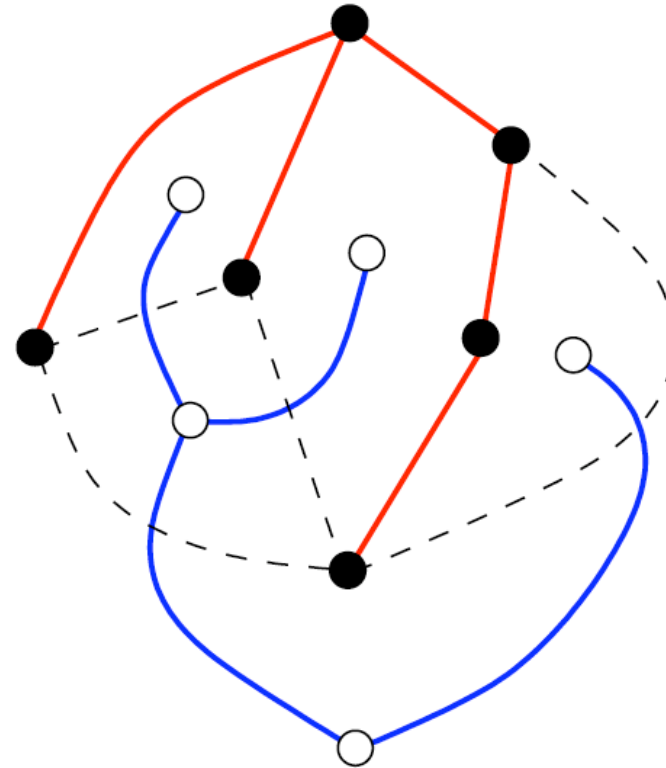


Relation d'Euler

- Soit $C=(V,E,F)$ une carte planaire. Alors

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

car $|E| = (|V|-1) + (|F|-1)$

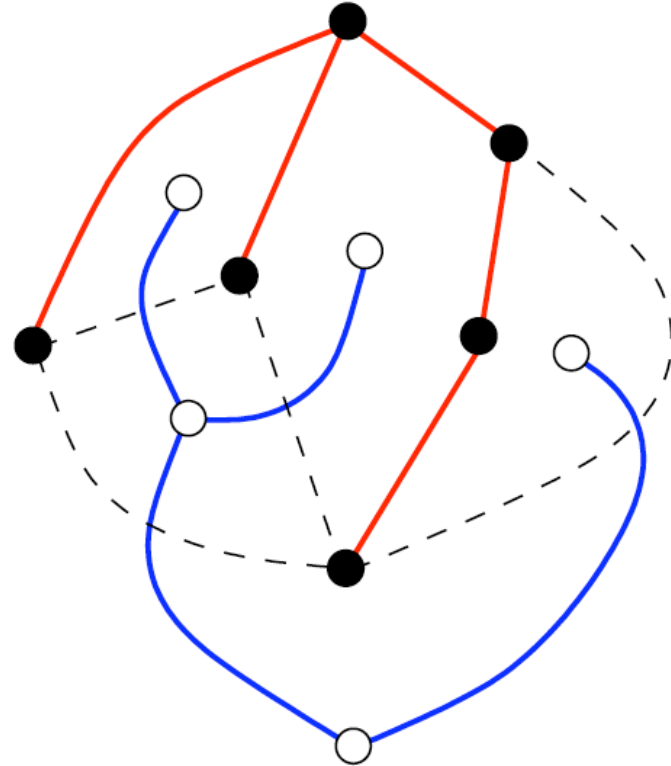


Relation d'Euler

- Soit $C=(V,E,F)$ une carte planaire. Alors

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

car $|E| = (|V|-1) + (|F|-1)$



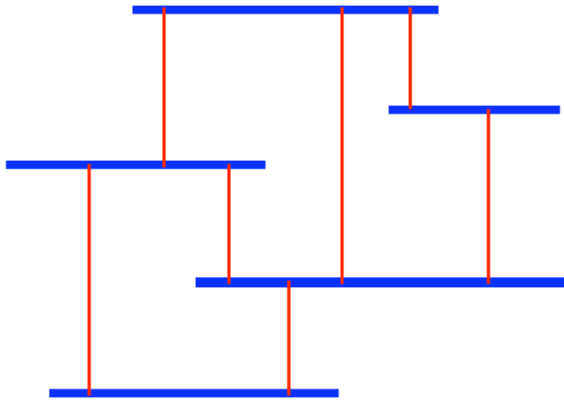
$$\Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6$$

(donc K_5 a **trop d'arêtes** pour être planaire)

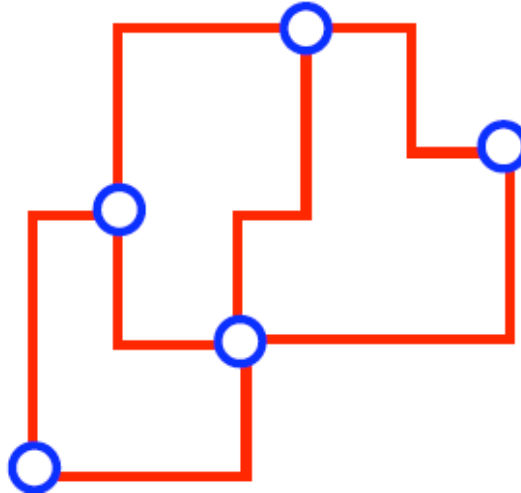
Plusieurs types de dessin planaire

(cf *graph drawing tutorial* [Cruz, Tamassia])

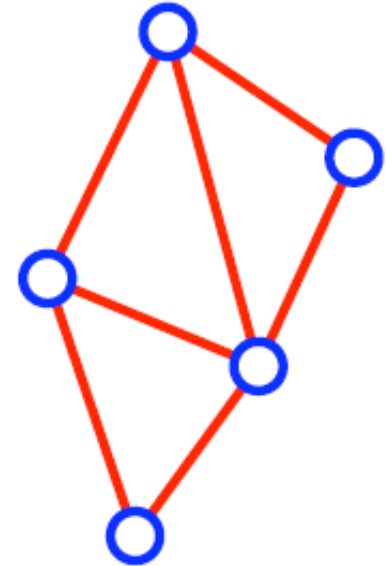
Visibilité



Orthogonal



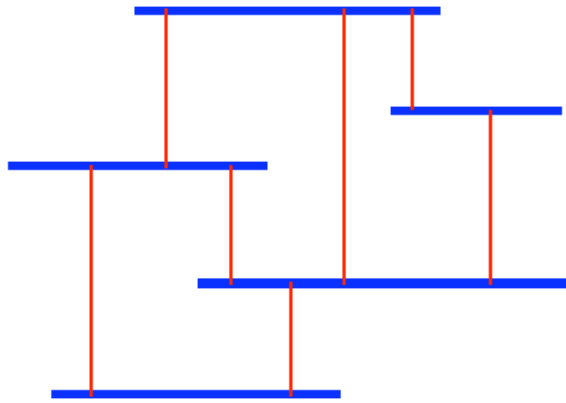
En lignes droites



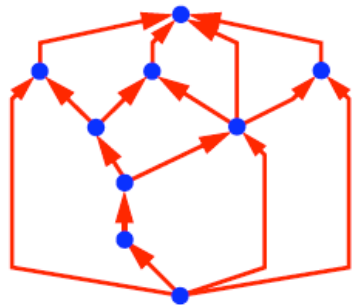
Plusieurs types de dessin planaire

(cf *graph drawing tutorial* [Cruz, Tamassia])

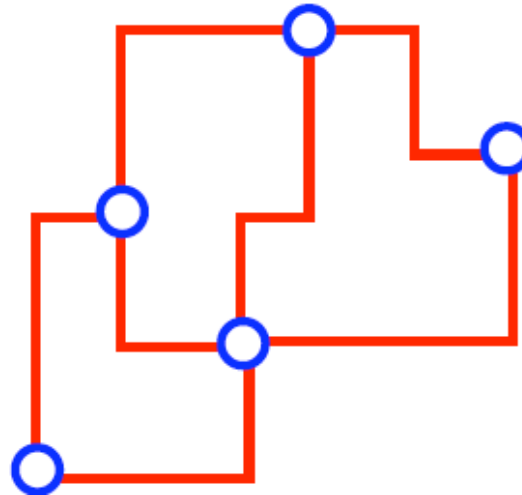
Visibilité



diagrammes
hiérarchiques

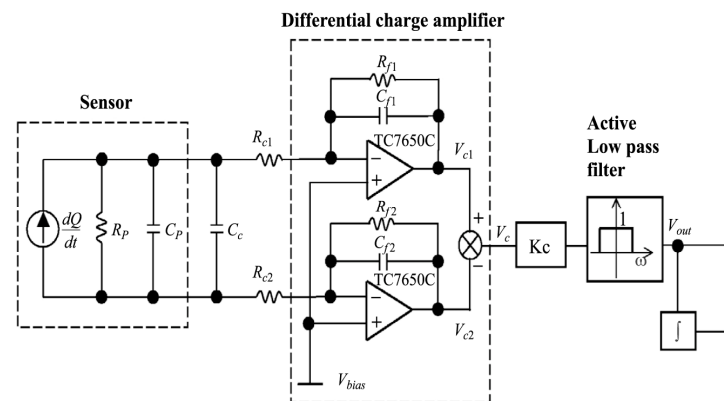
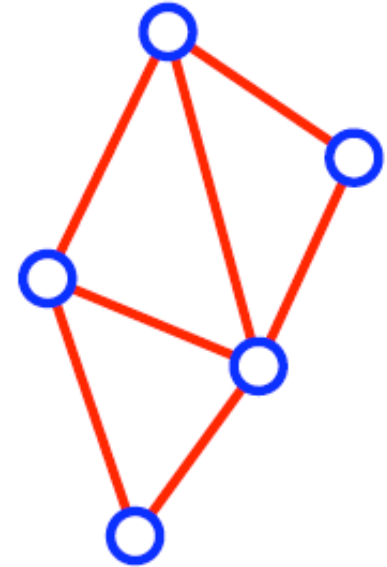


Orthogonal



placement composants
sur circuit électronique

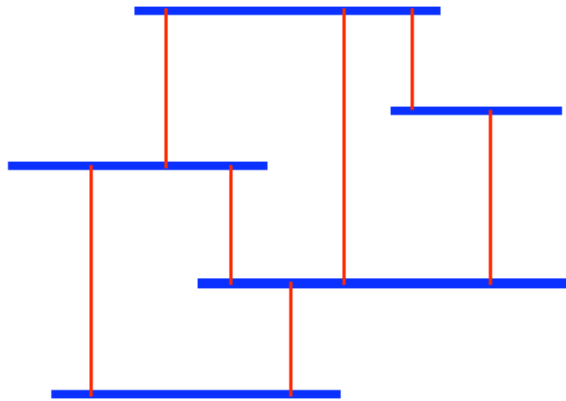
En lignes droites



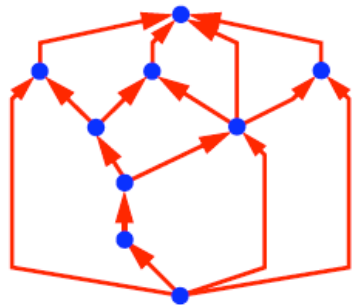
Plusieurs types de dessin planaire

(cf *graph drawing tutorial* [Cruz, Tamassia])

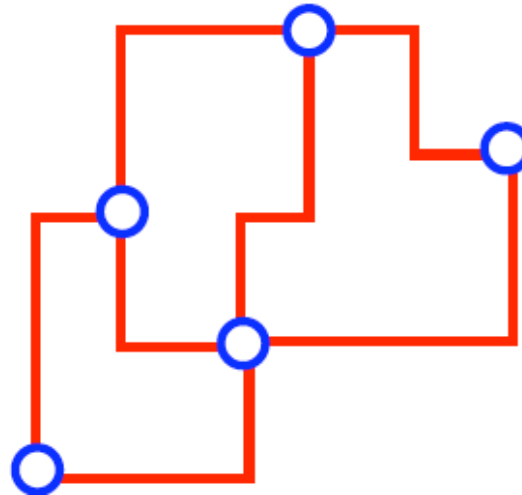
Visibilité



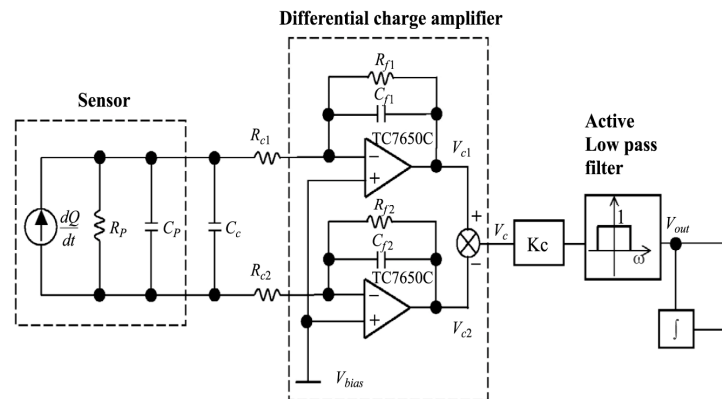
diagrammes
hiérarchiques



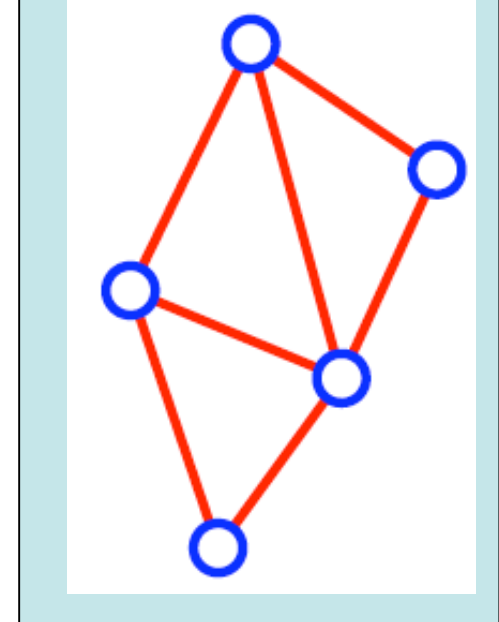
Orthogonal



placement composants
sur circuit électronique



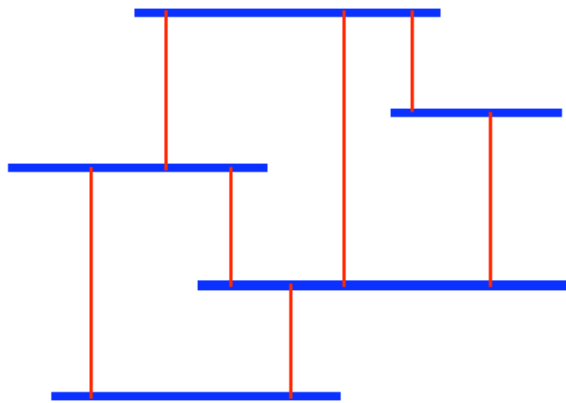
En lignes droites



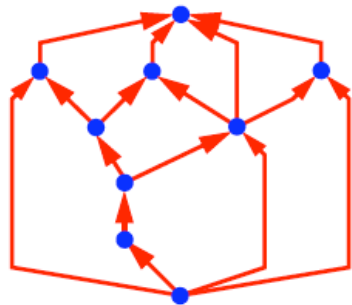
Plusieurs types de dessin planaire

(cf *graph drawing tutorial* [Cruz, Tamassia])

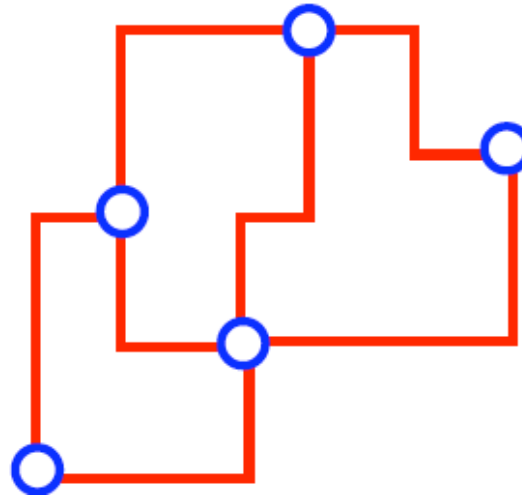
Visibilité



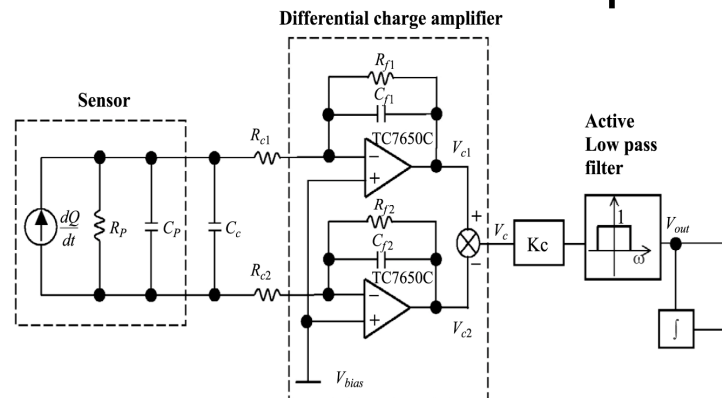
diagrammes
hiérarchiques



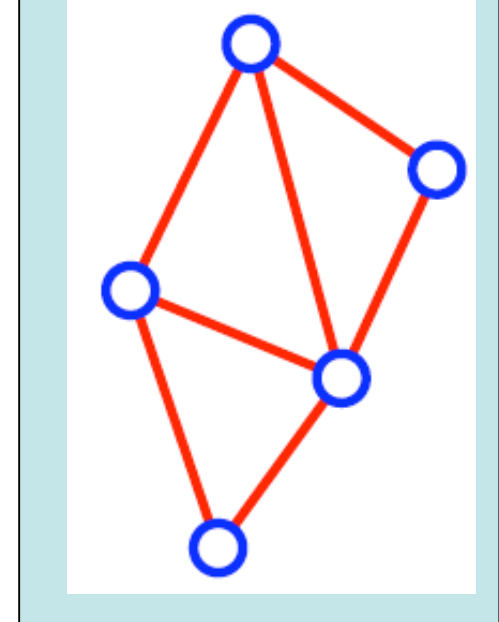
Orthogonal



placement composants
sur circuit électronique



En lignes droites

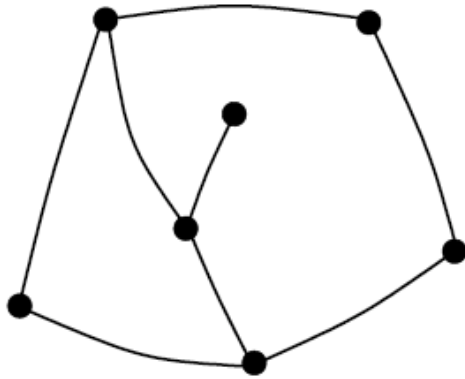


[Fary'48]: toute
carte planaire
admet un dessin
en lignes droites

Partie II: algorithmes de dessin planaire en lignes droites

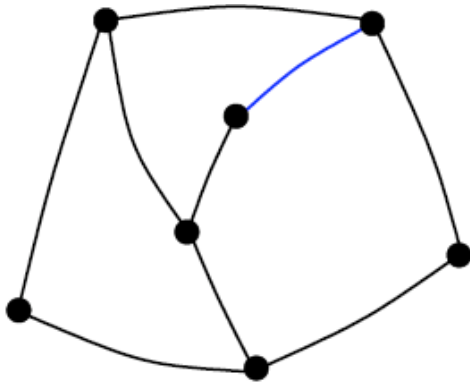
Réduction aux cartes triangulées

- On peut toujours **triangler** une carte plane



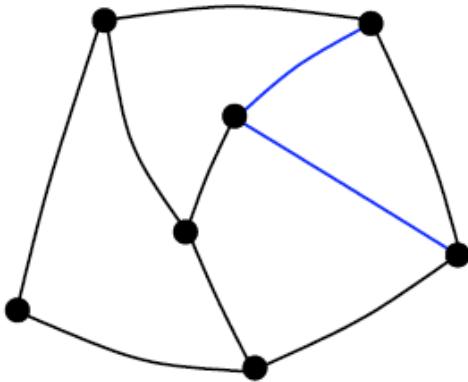
Réduction aux cartes triangulées

- On peut toujours **triangler** une carte plane



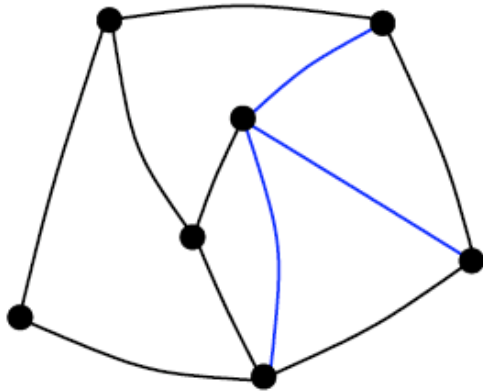
Réduction aux cartes triangulées

- On peut toujours **triangler** une carte planeaire



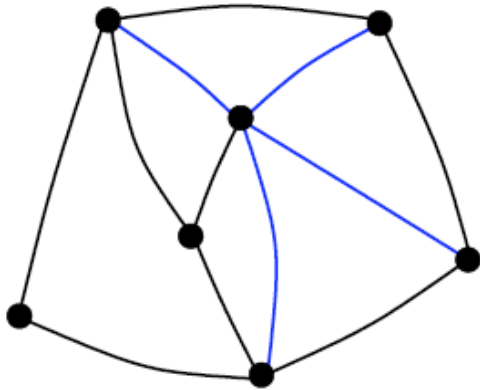
Réduction aux cartes triangulées

- On peut toujours **triangler** une carte plane



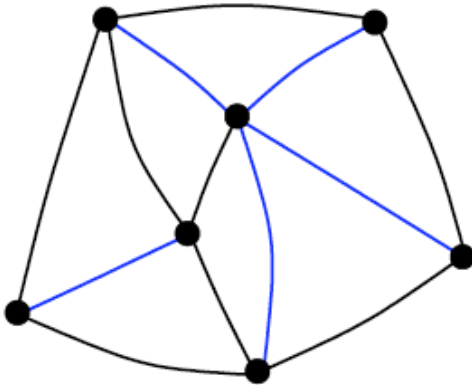
Réduction aux cartes triangulées

- On peut toujours **triangler** une carte plane



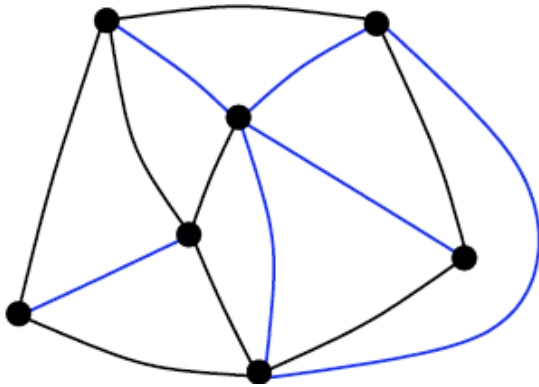
Réduction aux cartes triangulées

- On peut toujours **triangler** une carte plane



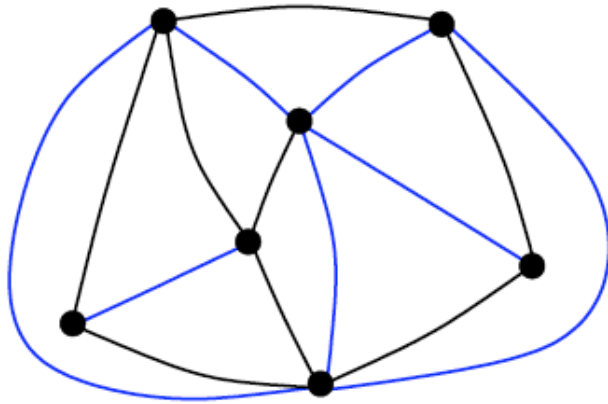
Réduction aux cartes triangulées

- On peut toujours **triangler** une carte plane



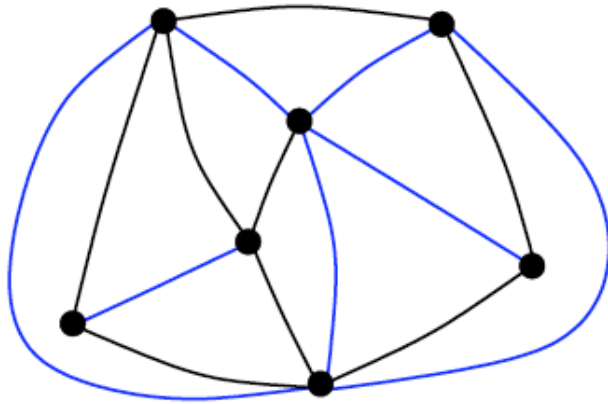
Réduction aux cartes triangulées

- On peut toujours **triangler** une carte plane



Réduction aux cartes triangulées

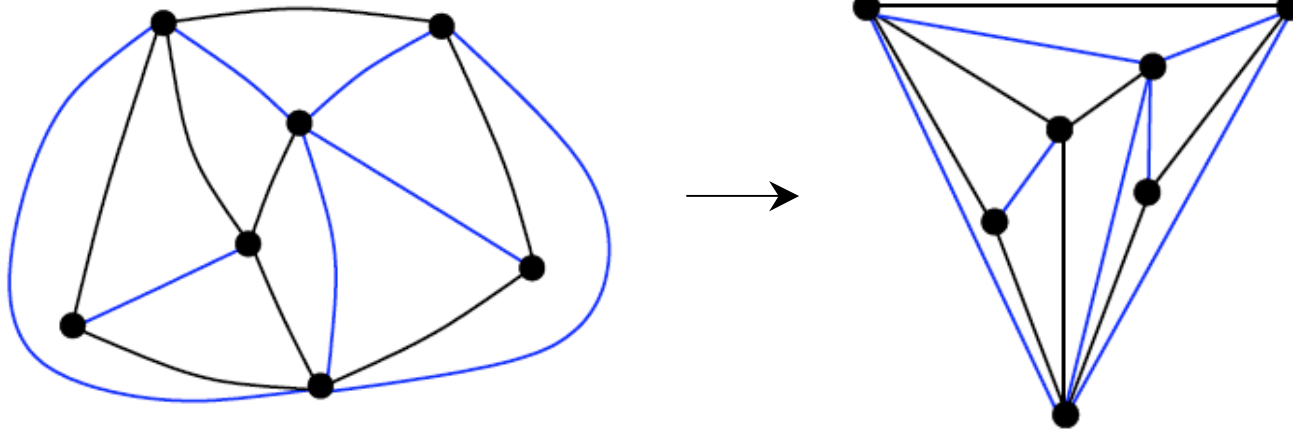
- On peut toujours **triangler** une carte plane



⇒ dessiner une carte se réduit à dessiner une triangulation

Réduction aux cartes triangulées

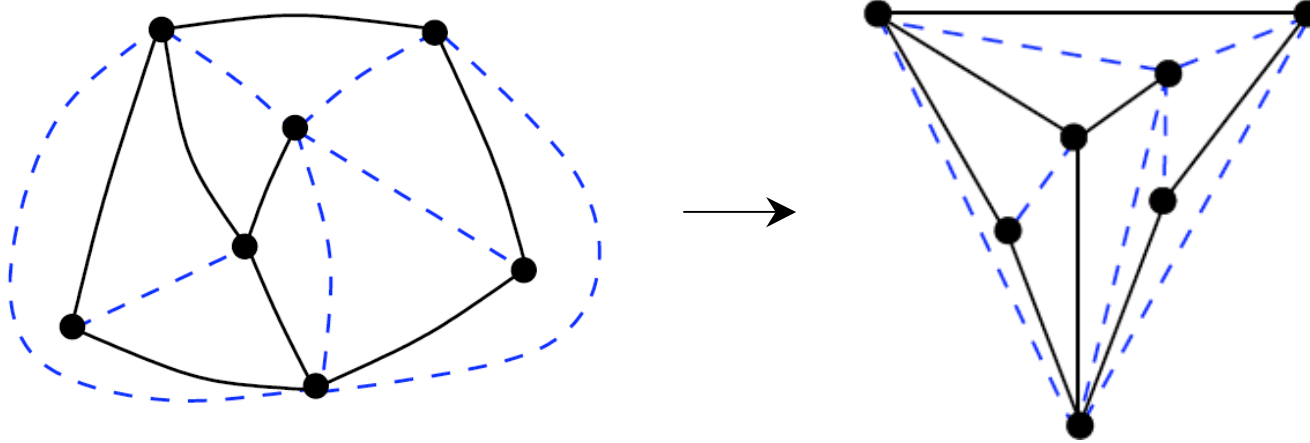
- On peut toujours **triangler** une carte plane



$\Rightarrow$ dessiner une carte se réduit à dessiner une triangulation

Réduction aux cartes triangulées

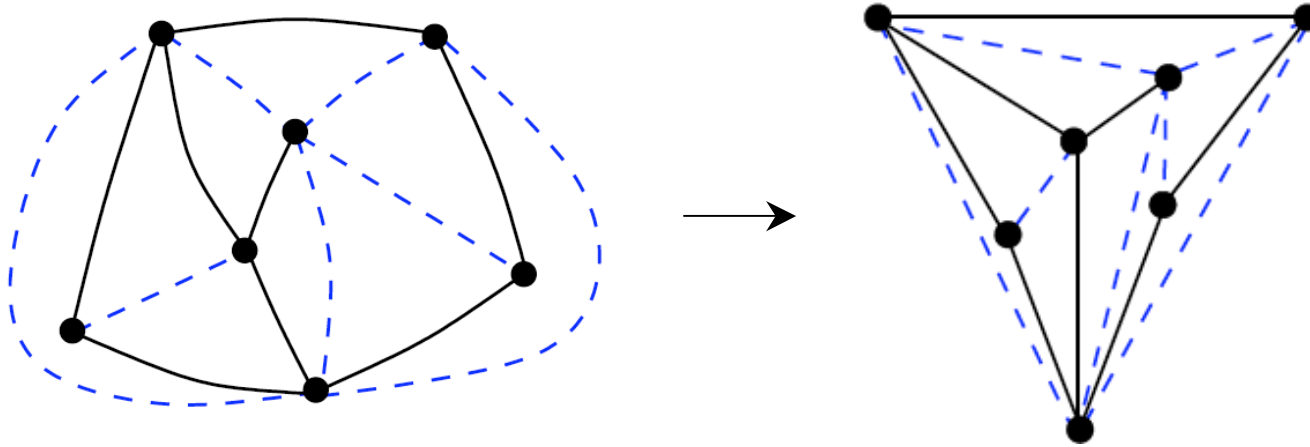
- On peut toujours **triangler** une carte plane



⇒ dessiner une carte se réduit à dessiner une triangulation

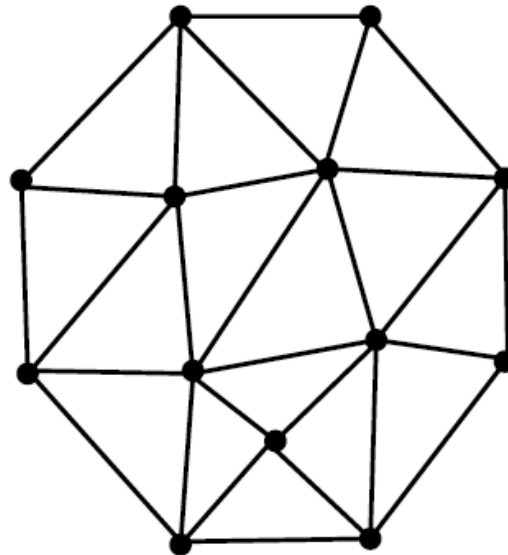
Réduction aux cartes triangulées

- On peut toujours **triangler** une carte plane



⇒ dessiner une carte se réduit à dessiner une triangulation

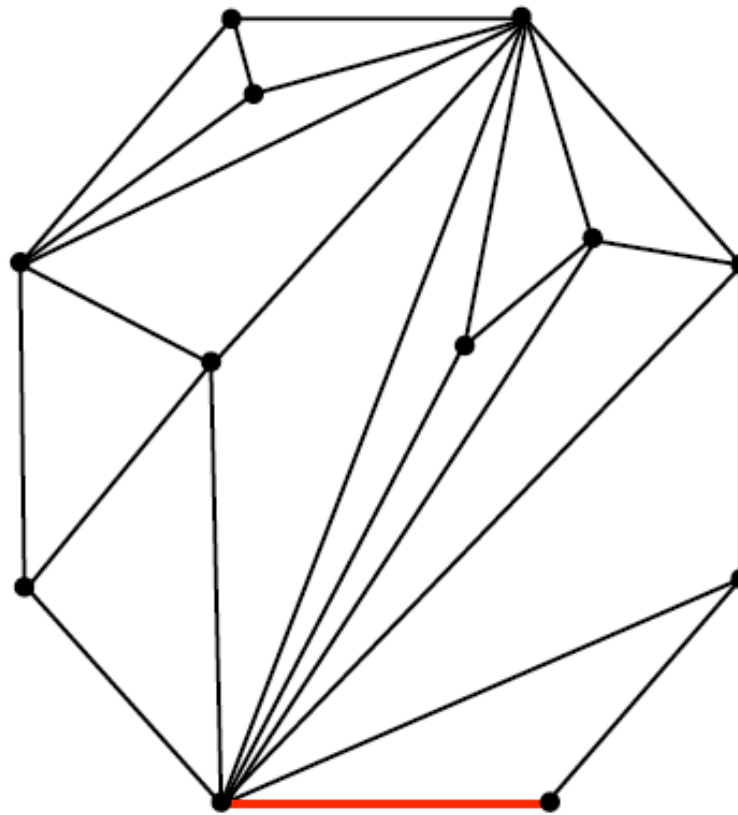
- On s'intéresse ici aux **quasi-triangulations** (face externe polygonale)



Epluchage de quasi-triangulations

- Soit Q une quasi-triangulation, ∂Q le bord de Q
Soit e une arête marquée sur ∂Q (arête de base).

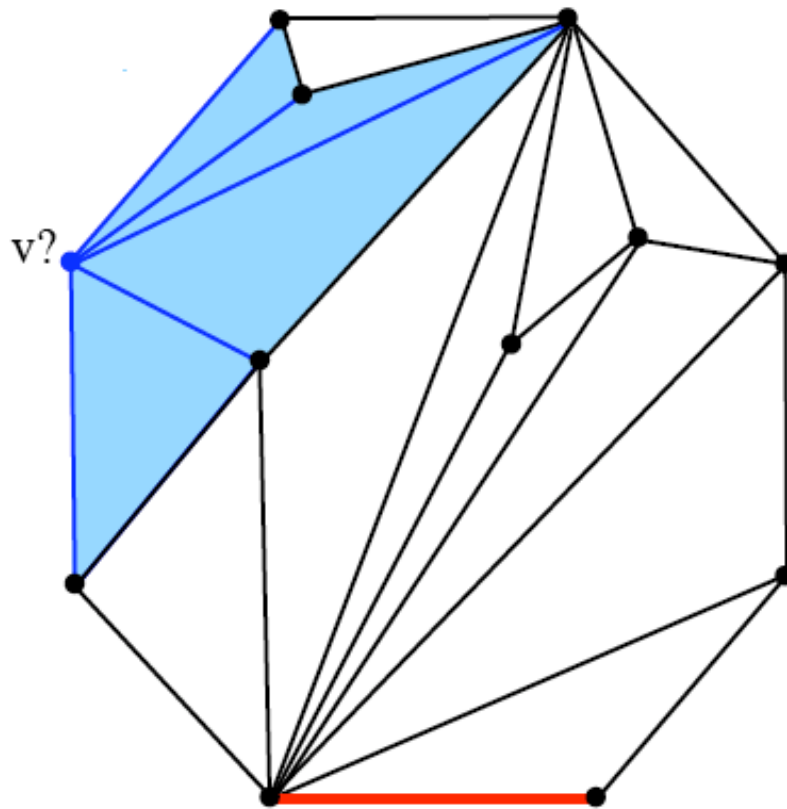
Alors il existe un sommet v sur $\partial Q \setminus e$ tel que
 $Q \setminus v$ soit une quasi-triangulation



Epluchage de quasi-triangulations

- Soit Q une quasi-triangulation, ∂Q le bord de Q
Soit e une arête marquée sur ∂Q (arête de base).

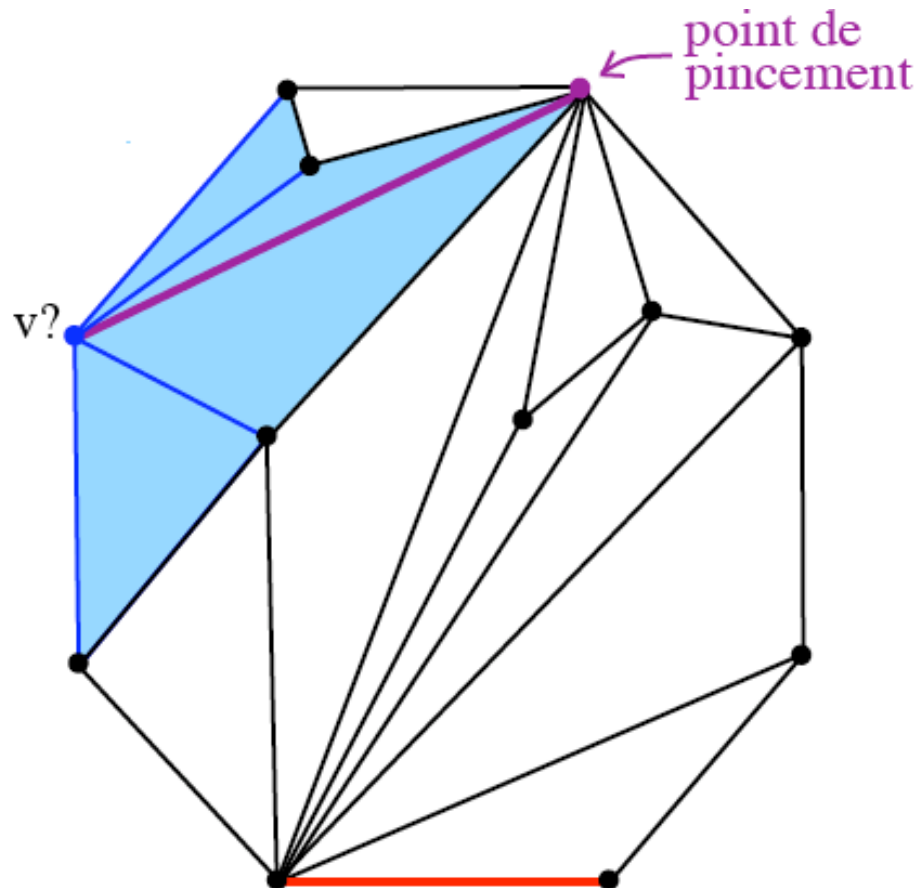
Alors il existe un sommet v sur $\partial Q \setminus e$ tel que
 $Q \setminus v$ soit une quasi-triangulation



Epluchage de quasi-triangulations

- Soit Q une quasi-triangulation, ∂Q le bord de Q
Soit e une arête marquée sur ∂Q (arête de base).

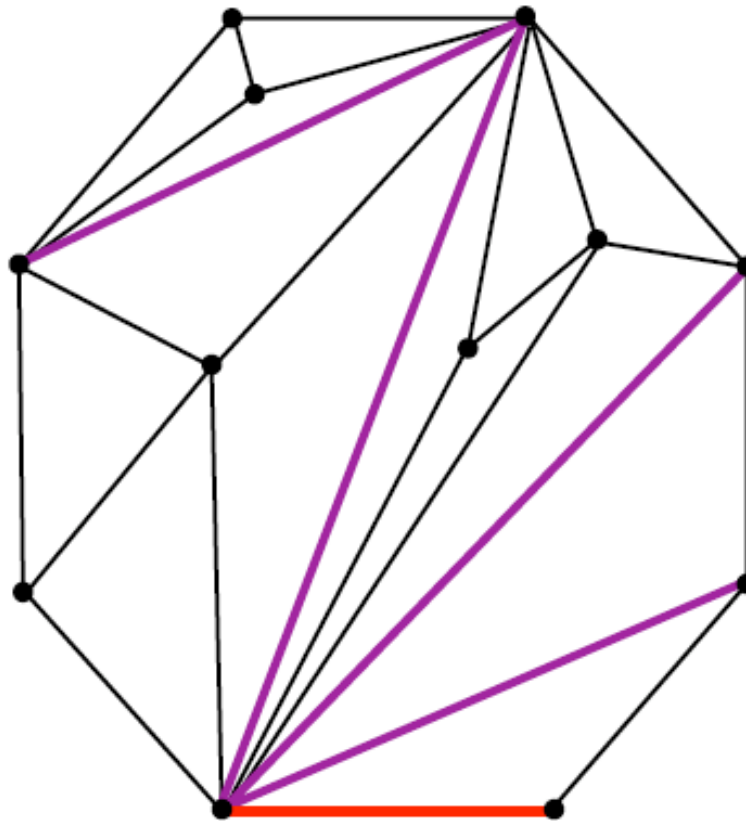
Alors il existe un sommet v sur $\partial Q \setminus e$ tel que
 $Q \setminus v$ soit une quasi-triangulation



Epluchage de quasi-triangulations

- Soit Q une quasi-triangulation, ∂Q le bord de Q
Soit e une arête marquée sur ∂Q (arête de base).

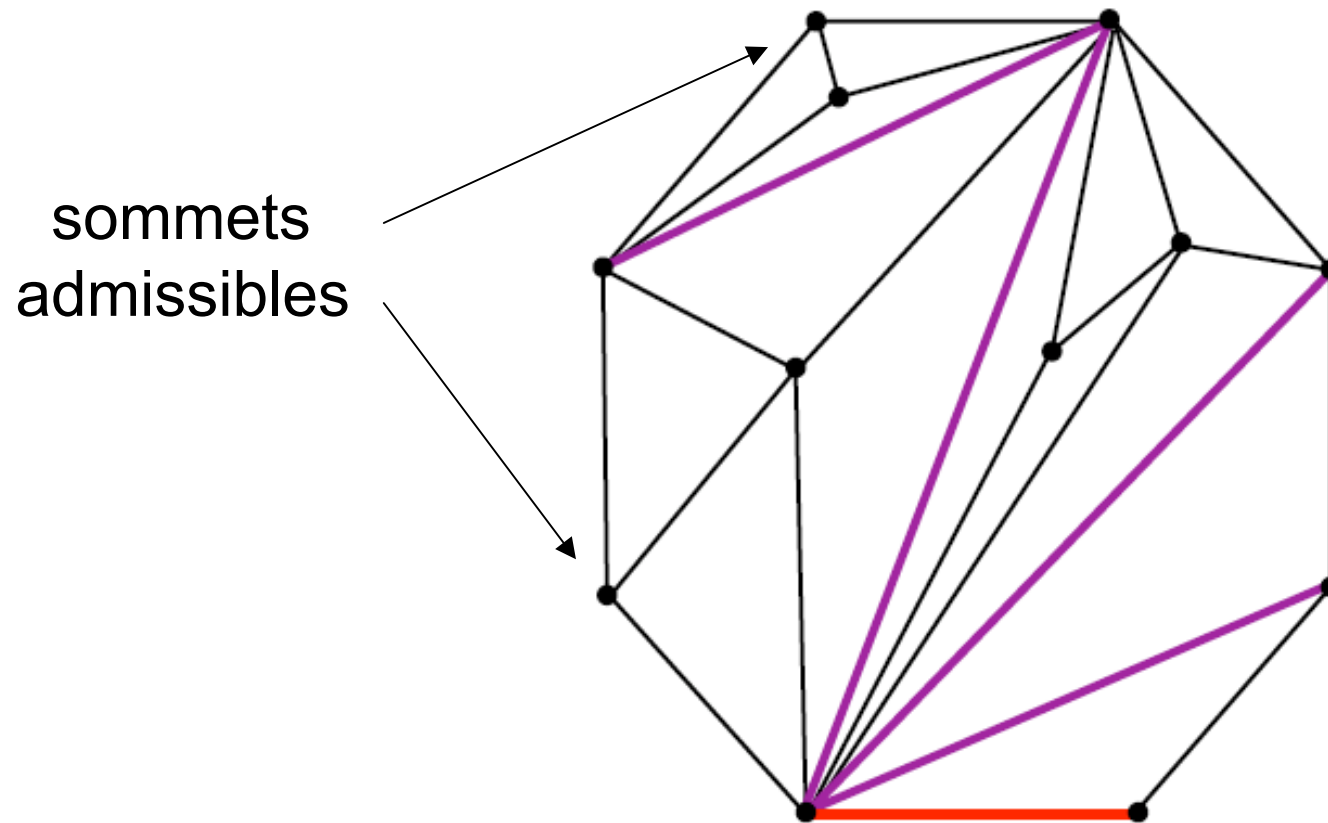
Alors il existe un sommet v sur $\partial Q \setminus e$ tel que
 $Q \setminus v$ soit une quasi-triangulation



Epluchage de quasi-triangulations

- Soit Q une quasi-triangulation, ∂Q le bord de Q
Soit e une arête marquée sur ∂Q (arête de base).

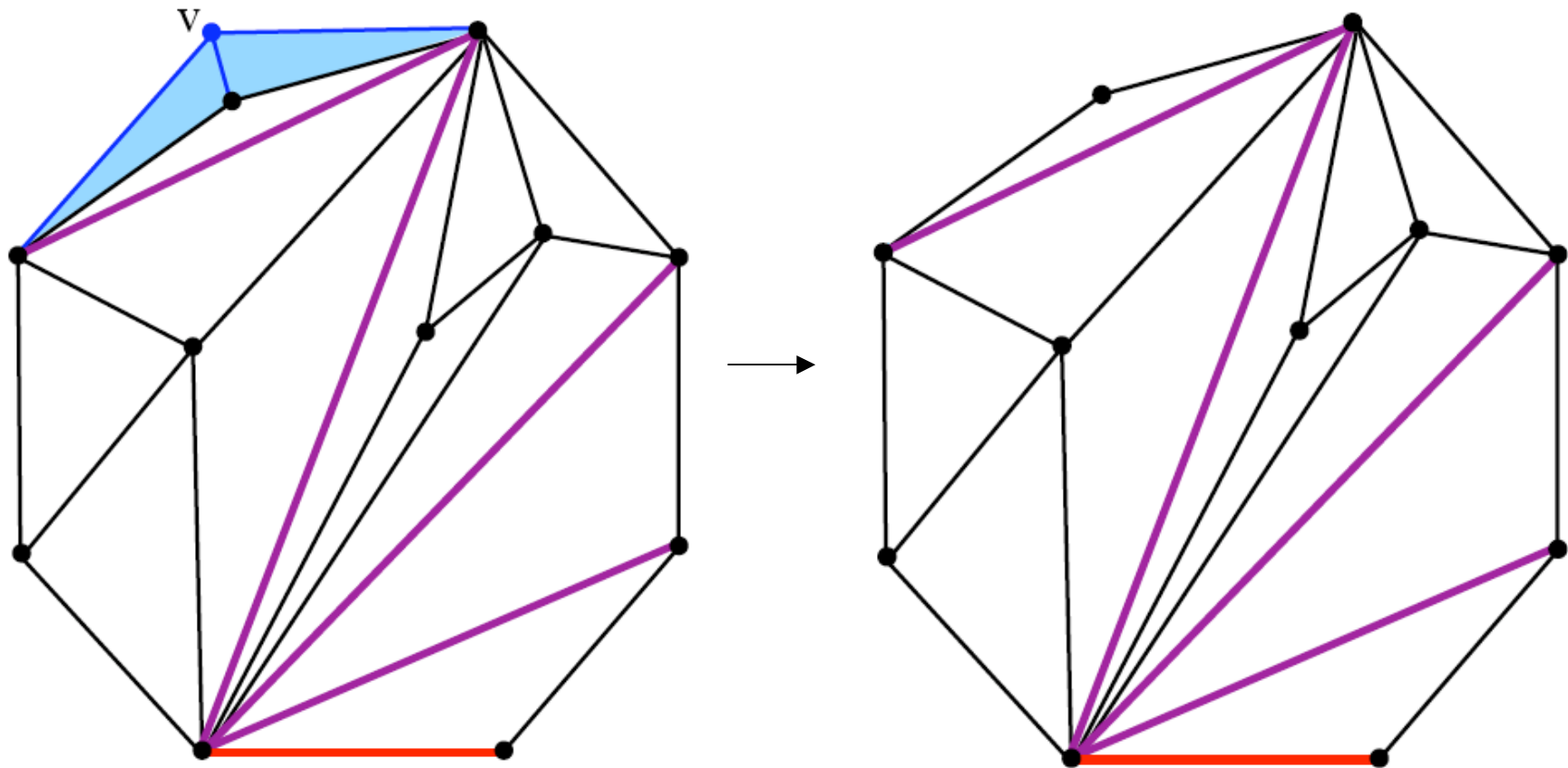
Alors il existe un sommet v sur $\partial Q \setminus e$ tel que
 $Q \setminus v$ soit une quasi-triangulation



Epluchage de quasi-triangulations

- Soit Q une quasi-triangulation, ∂Q le bord de Q
Soit e une arête marquée sur ∂Q (arête de base).

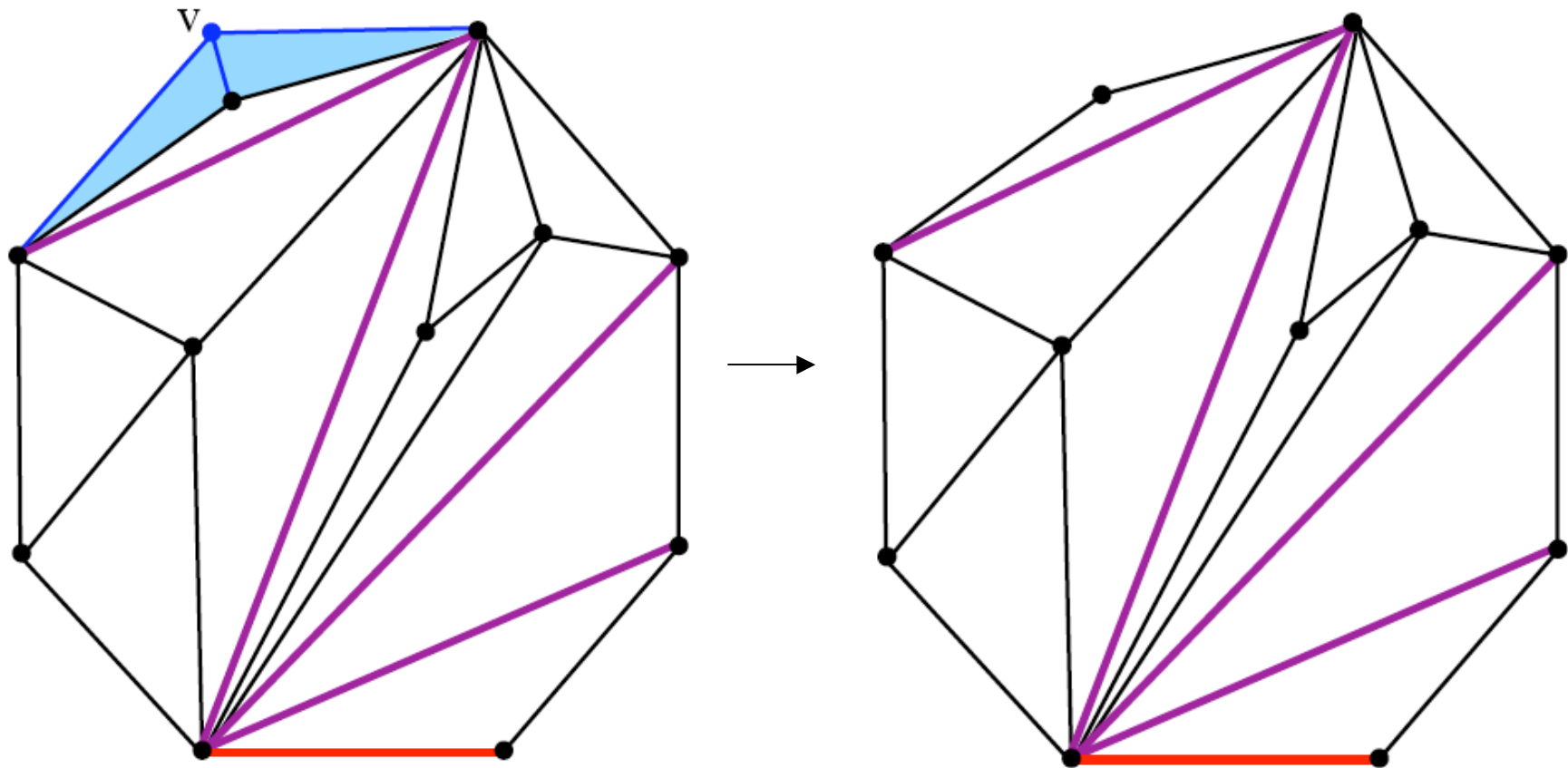
Alors il existe un sommet v sur $\partial Q \setminus e$ tel que
 $Q \setminus v$ soit une quasi-triangulation



Epluchage de quasi-triangulations

- Soit Q une quasi-triangulation, ∂Q le bord de Q
Soit e une arête marquée sur ∂Q (arête de base).

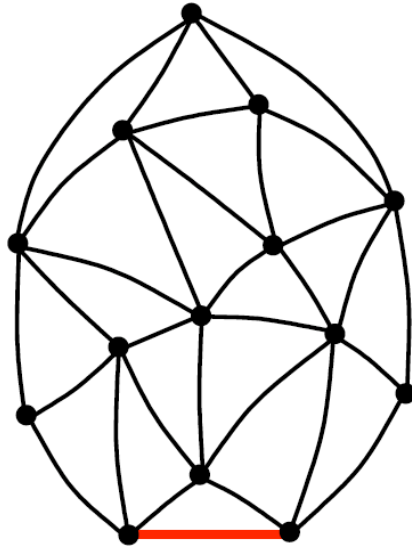
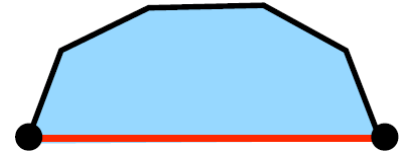
Alors il existe un sommet v sur $\partial Q \setminus e$ tel que
 $Q \setminus v$ soit une quasi-triangulation



$\Rightarrow$ se prête à des algorithmes récursifs / incrémentaux

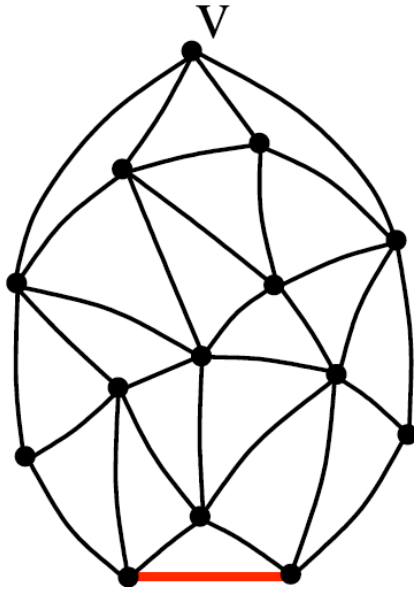
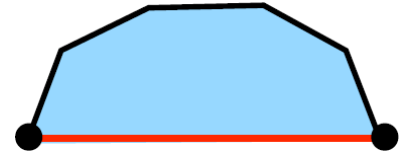
Algorithme récursif de dessin

Produit un dessin avec polygone externe de la forme



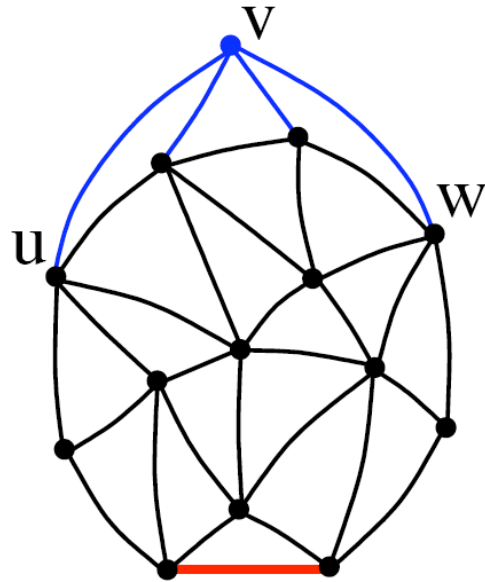
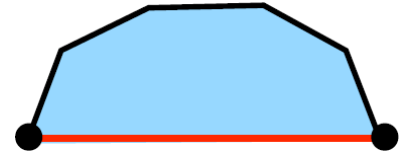
Algorithme récursif de dessin

Produit un dessin avec polygone externe de la forme



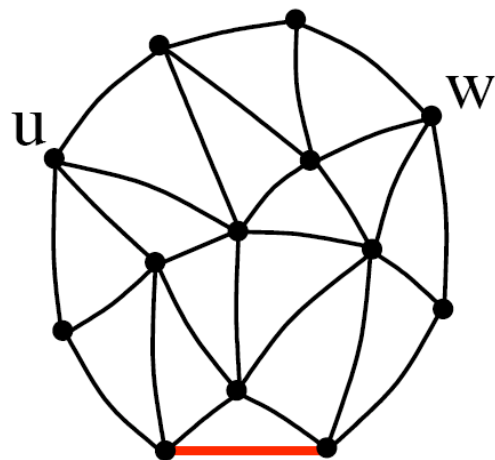
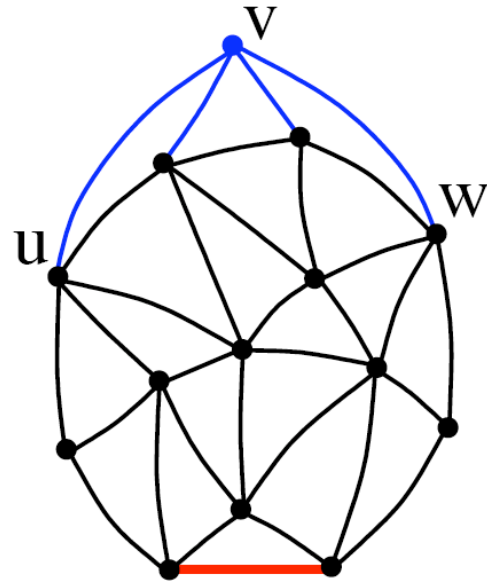
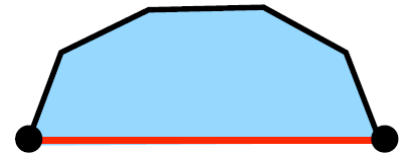
Algorithme récursif de dessin

Produit un dessin avec polygone externe de la forme



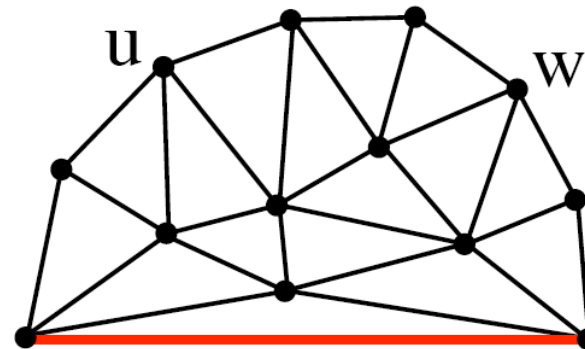
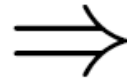
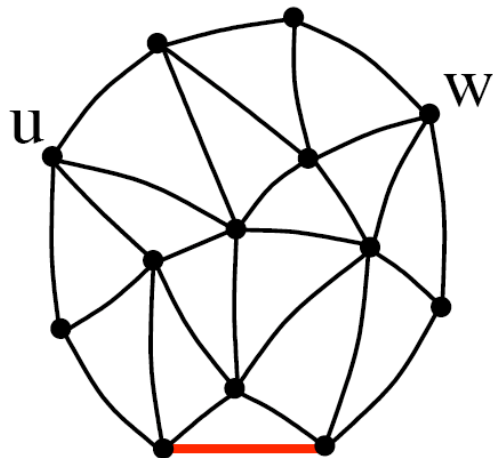
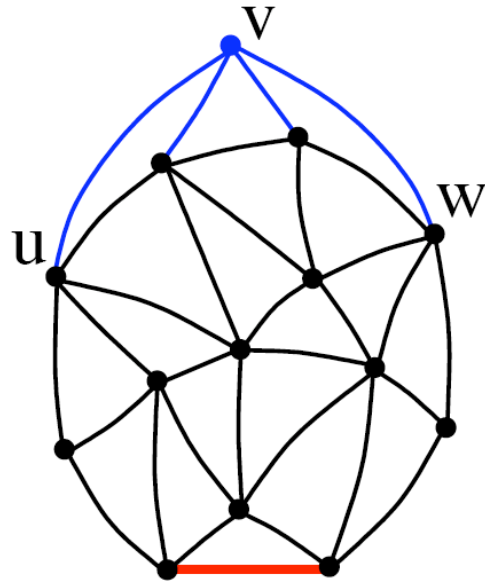
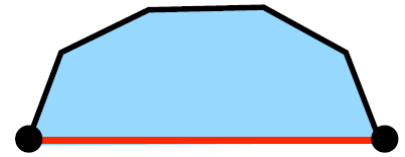
Algorithme récursif de dessin

Produit un dessin avec polygone externe de la forme



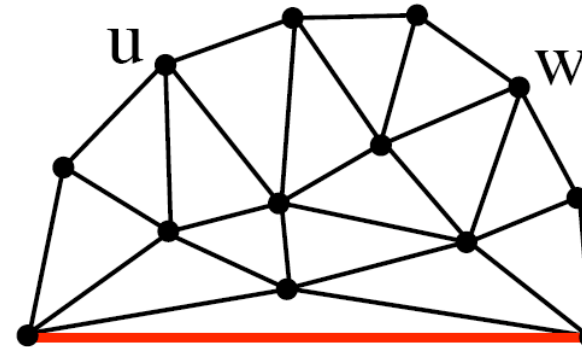
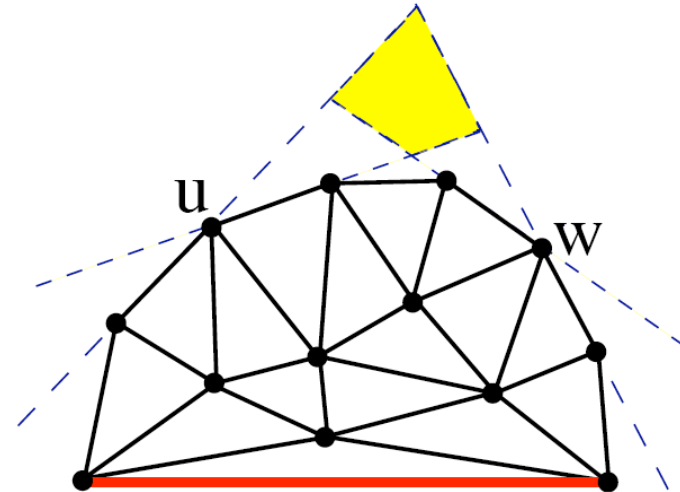
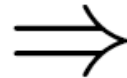
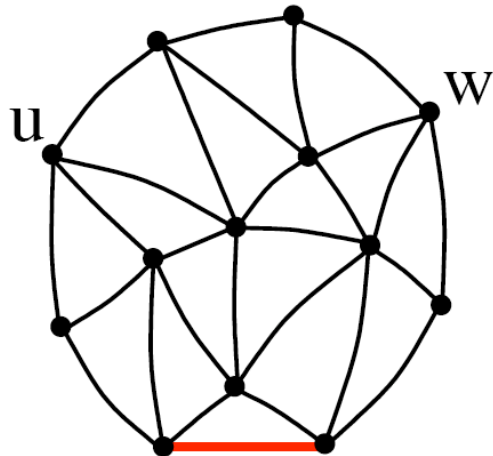
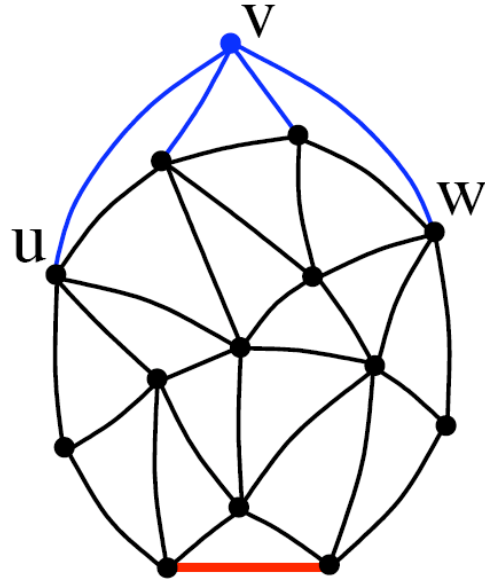
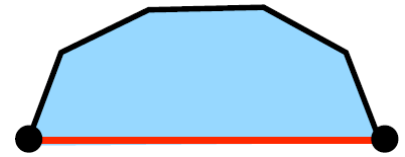
Algorithme récursif de dessin

Produit un dessin avec polygone externe de la forme



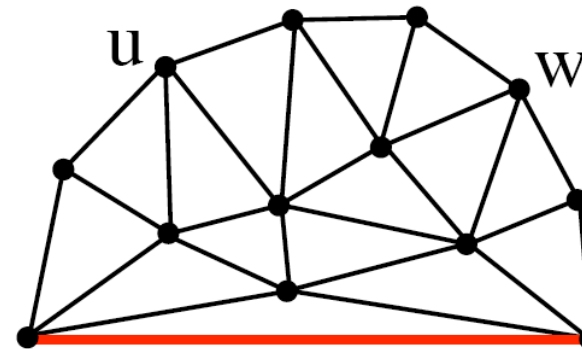
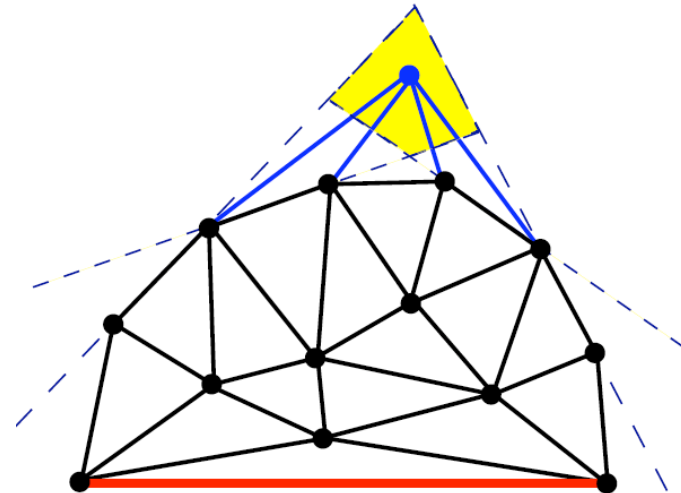
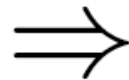
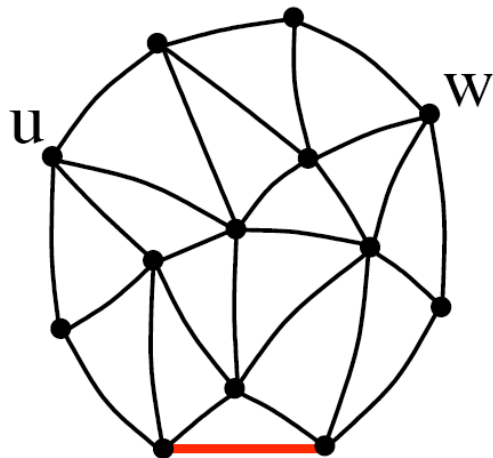
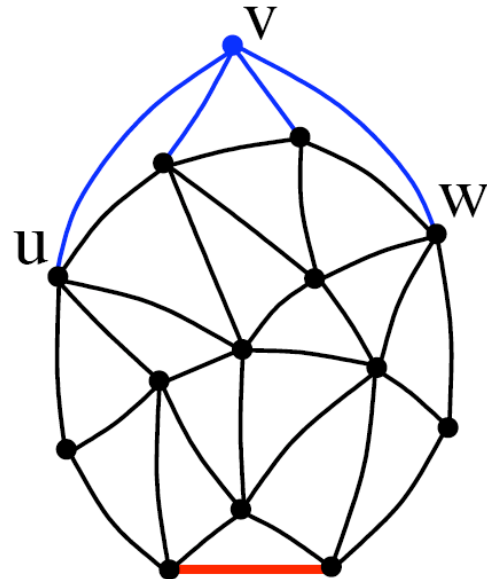
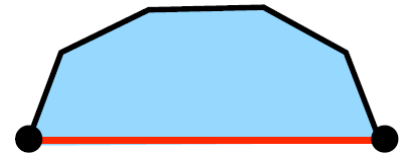
Algorithme récursif de dessin

Produit un dessin avec polygone externe de la forme



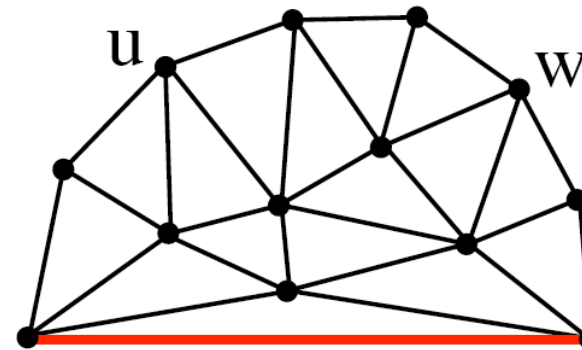
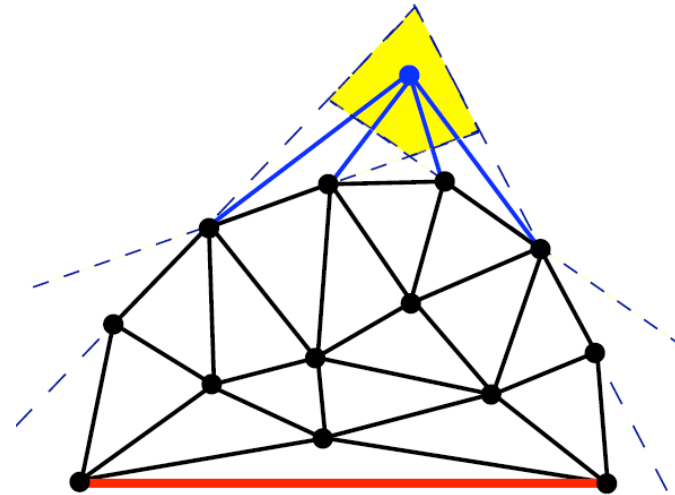
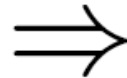
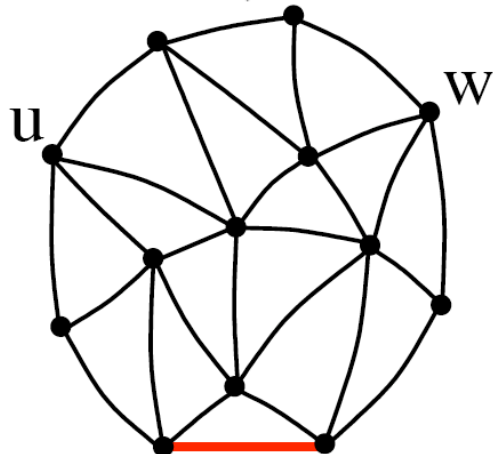
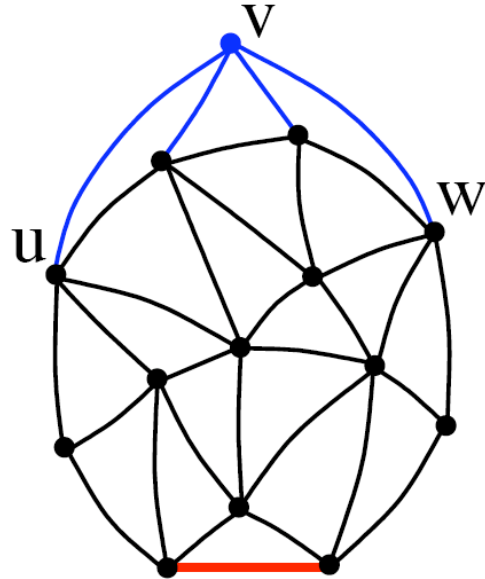
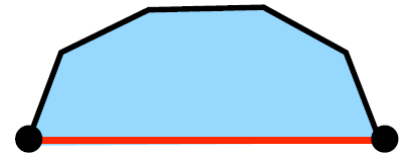
Algorithme récursif de dessin

Produit un dessin avec polygone externe de la forme



Algorithme récursif de dessin

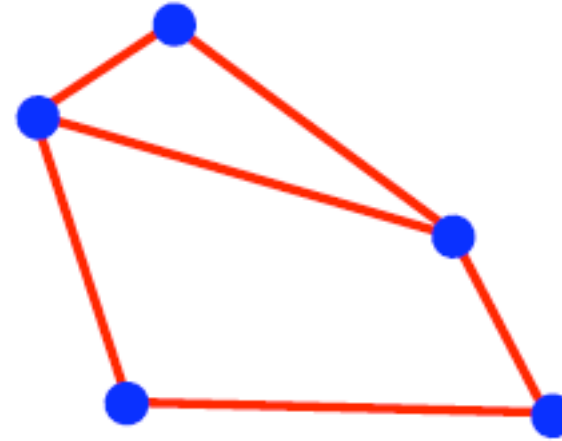
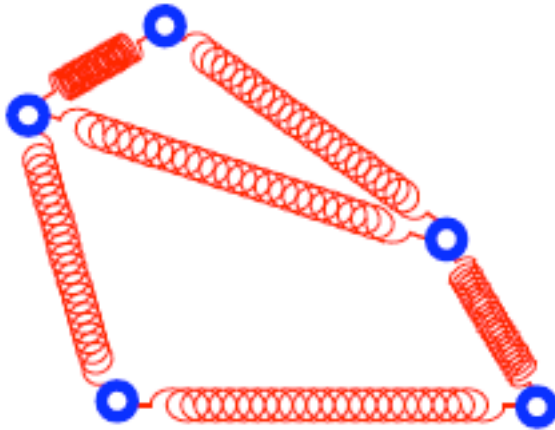
Produit un dessin avec polygone externe de la forme



Complexité $O(n)$ en nombre d'opérations arithmétiques sur R

Dessin par ressorts

- Chaque arête est vue comme un ressort (longueur 0 au repos)



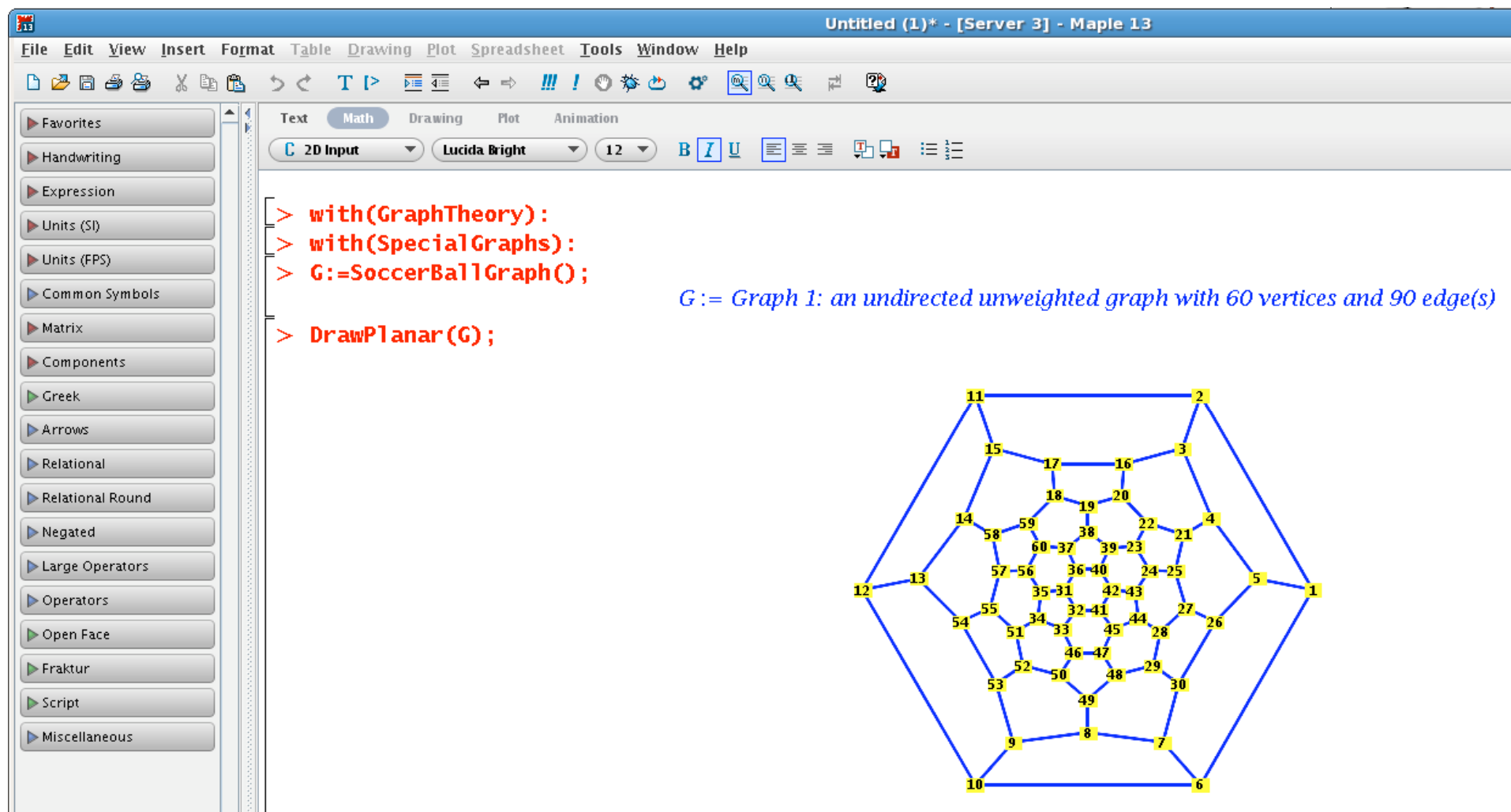
- “Energie potentielle” d’un dessin:

$$\mathcal{P} = \sum_{e \in E} \text{Longueur}(e)^2 = \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

- [Tutte’63] Soit Q une quasi-triangulation. Sous la contrainte que la face externe est fixée sous forme d’un polygone convexe, l’unique dessin minimisant l’énergie est planaire (s’applique plus généralement aux graphes de polyèdres)

Exemple (sous Maple)

Package ``GraphTheory'' (Maple 11 et +), méthode ``DrawPlanar''



The screenshot displays the Maple 13 software interface. The title bar indicates 'Untitled (1)* - [Server 3] - Maple 13'. The menu bar includes File, Edit, View, Insert, Format, Table, Drawing, Plot, Spreadsheet, Tools, Window, and Help. The toolbar contains various icons for file operations, editing, and plotting. On the left, a sidebar lists categories like Favorites, Handwriting, Expression, Units (SI), Units (FPS), Common Symbols, Matrix, Components, Greek, Arrows, Relational, Relational Round, Negated, Large Operators, Operators, Open Face, Fraktur, Script, and Miscellaneous. The main workspace is divided into a text area on the left and a plot area on the right. The text area contains the following commands:

```
> with(GraphTheory):  
> with(SpecialGraphs):  
> G:=SoccerBallGraph();  
  
> DrawPlanar(G);
```

To the right of the commands, a descriptive text reads: *G := Graph 1: an undirected unweighted graph with 60 vertices and 90 edge(s)*. The plot area shows a planar graph visualization of the SoccerBallGraph, which is a truncated octahedron. The graph consists of 60 vertices, represented by yellow squares with black numbers, and 90 edges, represented by blue lines. The vertices are arranged in a symmetric, nested pattern, forming a planar representation of the truncated octahedron.

Dessin par ressort = barycentrique

- Sous la contrainte que le **polygone externe est fixé**, on minimise

$$\mathcal{P} = \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

- A l'équilibre on a donc (pour tout sommet interne)

$$0 = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} = 2 \sum_{j \text{ voisin de } i} (x_i - x_j)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i = \frac{1}{\Delta_i} \sum_{j \text{ voisin de } i} x_j} \quad (\text{idem pour les } y_i)$$

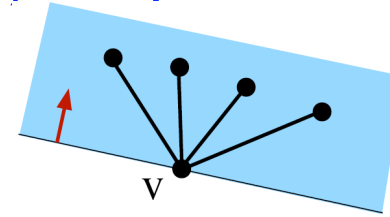
Rq: trouver $X=(x_1, \dots, x_n)$ revient à résoudre un système matriciel de la forme $A^*X=X_0$, idem pour $Y=(y_1, \dots, y_n)$

Preuve de planarité (1)

Nous montrons qu'un dessin de T (triang.) est planaire si satisfait:

(ii) les faces sont non dégénérées

(iii) chaque sommet interne v n'est pas

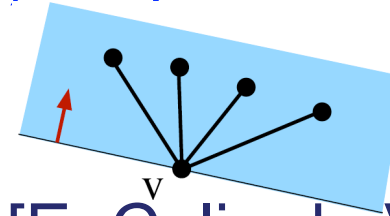


Preuve de planarité (1)

Nous montrons qu'un dessin de T (triang.) est planaire si satisfait:

(ii) les faces sont non dégénérées

(iii) chaque sommet interne v n'est pas



- Sommer les angles de deux façons [E. Colin de Verdières]:

Pour tout coin c (interne) de T , soit $\theta(c)$ l'angle de c sur le dessin

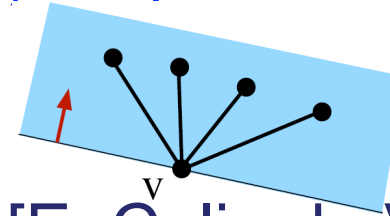
$$S := \sum_c \theta(c)$$

Preuve de planarité (1)

Nous montrons qu'un dessin de T (triang.) est planaire si satisfait:

(ii) les faces sont non dégénérées

(iii) chaque sommet interne v n'est pas



- Sommer les angles de deux façons [E. Colin de Verdières]:

Pour tout coin c (interne) de T , soit $\theta(c)$ l'angle de c sur le dessin

$$S := \sum_c \theta(c)$$

Sommation sur les sommets:

Pour un sommet v , soit $\Theta(v) = \sum_{c \text{ incident à } v} \theta(c)$

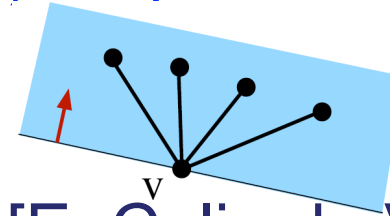
(iii) $\Rightarrow \Theta(v) \geq 2\pi$ pour tout sommet interne v

Preuve de planarité (1)

Nous montrons qu'un dessin de T (triang.) est planaire si satisfait:

(ii) les faces sont non dégénérées

(iii) chaque sommet interne v n'est pas



- Sommer les angles de deux façons [E. Colin de Verdières]:

Pour tout coin c (interne) de T , soit $\theta(c)$ l'angle de c sur le dessin

$$S := \sum_c \theta(c)$$

Sommation sur les sommets:

Pour un sommet v , soit $\Theta(v) = \sum_{c \text{ incident à } v} \theta(c)$

(iii) $\Rightarrow \Theta(v) \geq 2\pi$ pour tout sommet interne v

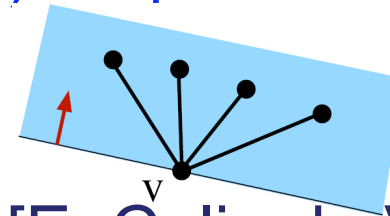
$$S \geq 2\pi(|V|-3) + \pi = \pi(2|V|-5)$$

Preuve de planarité (1)

Nous montrons qu'un dessin de T (triang.) est planaire si satisfait:

(ii) les faces sont non dégénérées

(iii) chaque sommet interne v n'est pas



- Sommer les angles de deux façons [E. Colin de Verdières]:

Pour tout coin c (interne) de T , soit $\theta(c)$ l'angle de c sur le dessin

$$S := \sum_c \theta(c)$$

Sommation sur les sommets:

Pour un sommet v , soit $\Theta(v) = \sum_{c \text{ incident à } v} \theta(c)$

(iii) $\Rightarrow \Theta(v) \geq 2\pi$ pour tout sommet interne v

$$S \geq 2\pi(|V|-3) + \pi = \pi(2|V|-5)$$

Sommation sur les faces internes:

Pour toute face interne f , soit $\Theta(f) = \sum_{c \text{ incident à } f} \theta(c)$

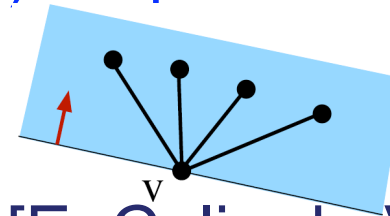
(ii) $\Rightarrow \Theta(f) = \pi$, $S = \pi(|F|-1)$

Preuve de planarité (1)

Nous montrons qu'un dessin de T (triang.) est planaire si satisfait:

(ii) les faces sont non dégénérées

(iii) chaque sommet interne v n'est pas



- Sommer les angles de deux façons [E. Colin de Verdières]:

Pour tout coin c (interne) de T , soit $\theta(c)$ l'angle de c sur le dessin

$$S := \sum_c \theta(c)$$

Sommation sur les sommets:

Pour un sommet v , soit $\Theta(v) = \sum_{c \text{ incident à } v} \theta(c)$

(iii) $\Rightarrow \Theta(v) \geq 2\pi$ pour tout sommet interne v

$$S \geq 2\pi(|V|-3) + \pi = \pi(2|V|-5)$$

Sommation sur les faces internes:

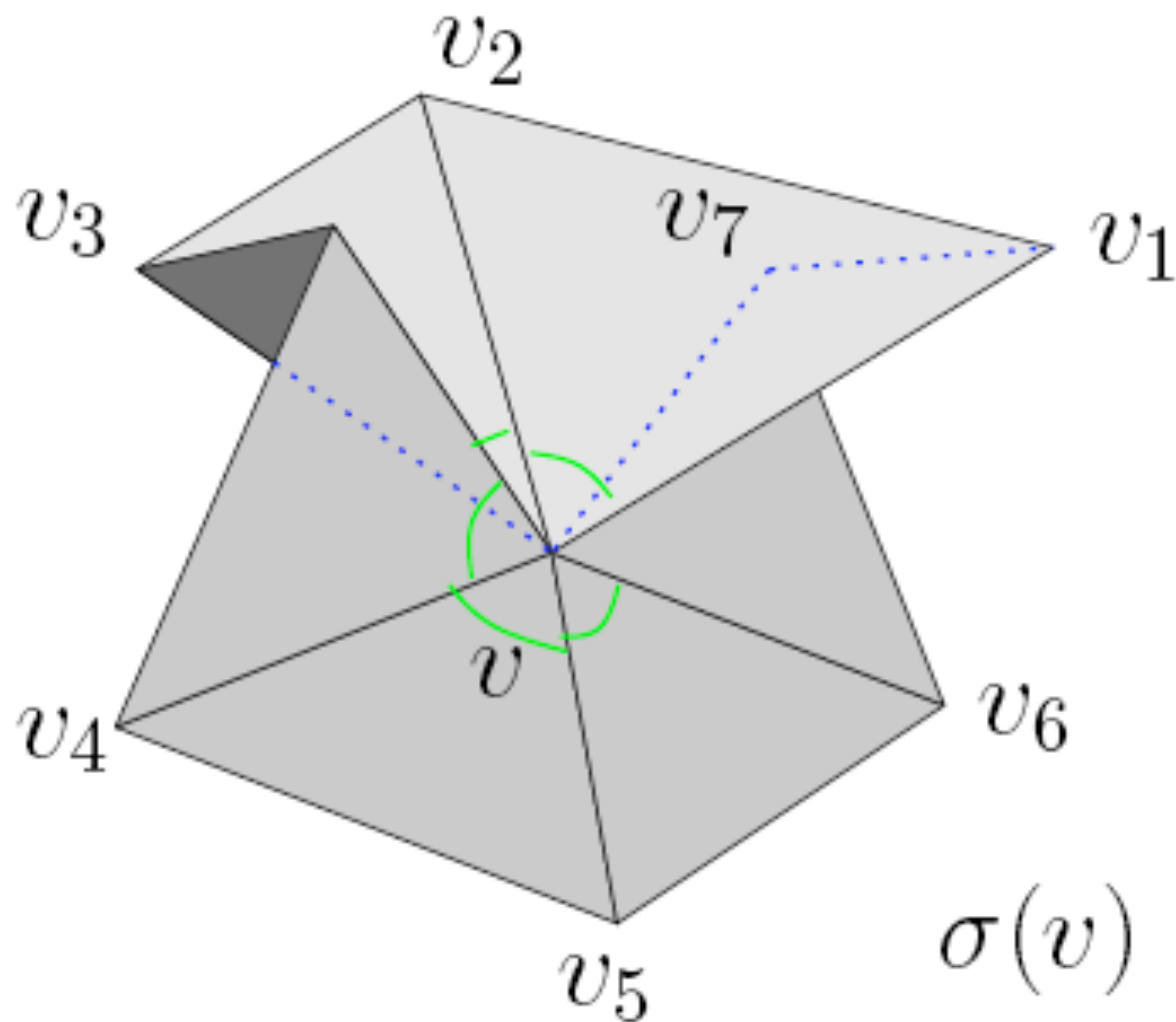
Pour toute face interne f , soit $\Theta(f) = \sum_{c \text{ incident à } f} \theta(c)$

(ii) $\Rightarrow \Theta(f) = \pi$, $S = \pi(|F|-1)$

Relat. Euler $\Rightarrow |F| = 2|V| - 4 \Rightarrow \Theta(v) = 2\pi$ pour tout sommet interne v

Preuve de planarité (2)

- Un dessin sans repliement ($\Theta(v)=2\pi$) est toujours planaire

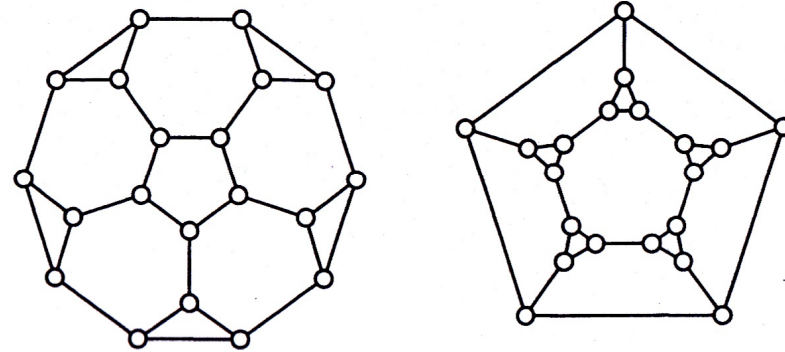


car les faces incidentes à un sommet ne se recoupent pas

Avantages / défauts

Avantages:

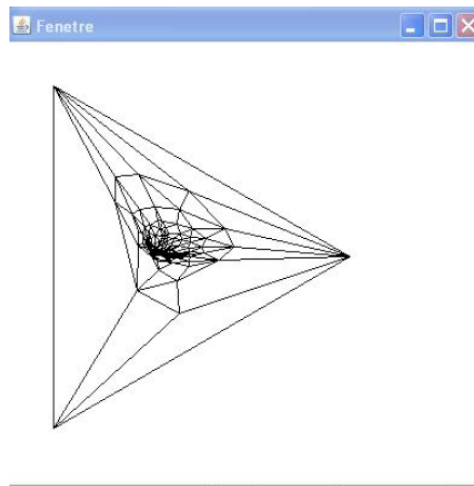
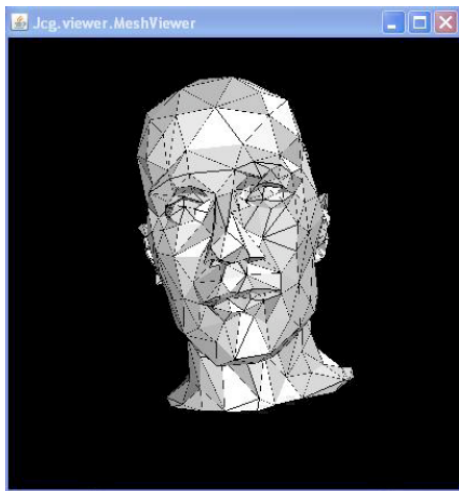
- **Optimal** (pour un certain critère d'énergie)
- **Pas besoin du plongement planaire** (les adjacences suffisent)
- Affiche les **symétries** du graphe



Défauts:

- **Coûteux** en complexité (résolution de systèmes matriciels)
- Certaines **faces peuvent être extrêmement petites** (exponentiellement petites par rapport à n)

images de
L. Castelli

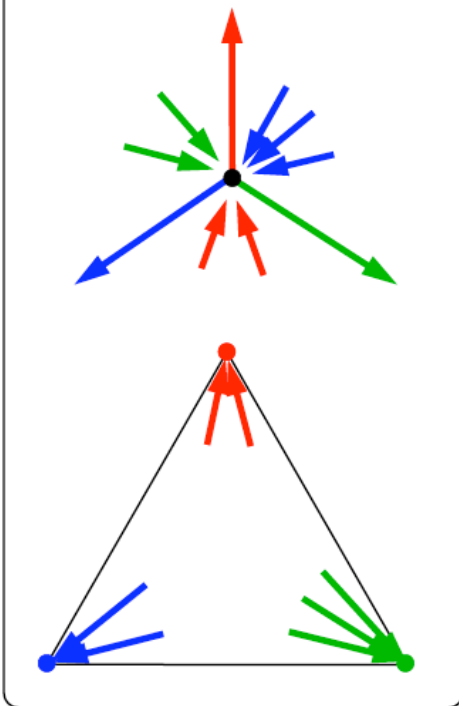


Résolution affichage
demandée est
exponentielle par
rapport au nombre
de sommets !

Bois de Schnyder (définition)

Chaque arête interne est orientée et coloriée en rouge, vert ou bleu tel que:

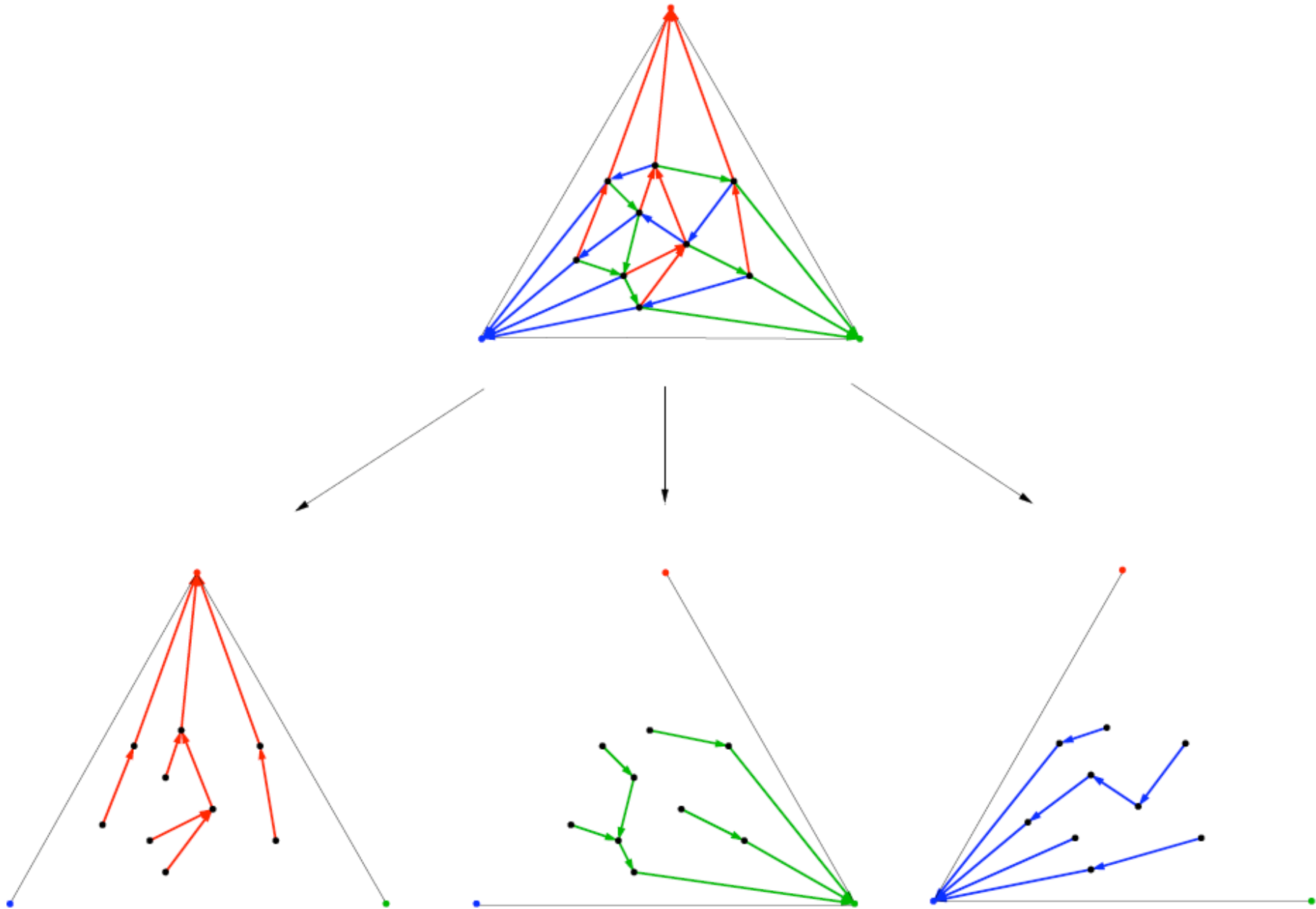
Règles locales:



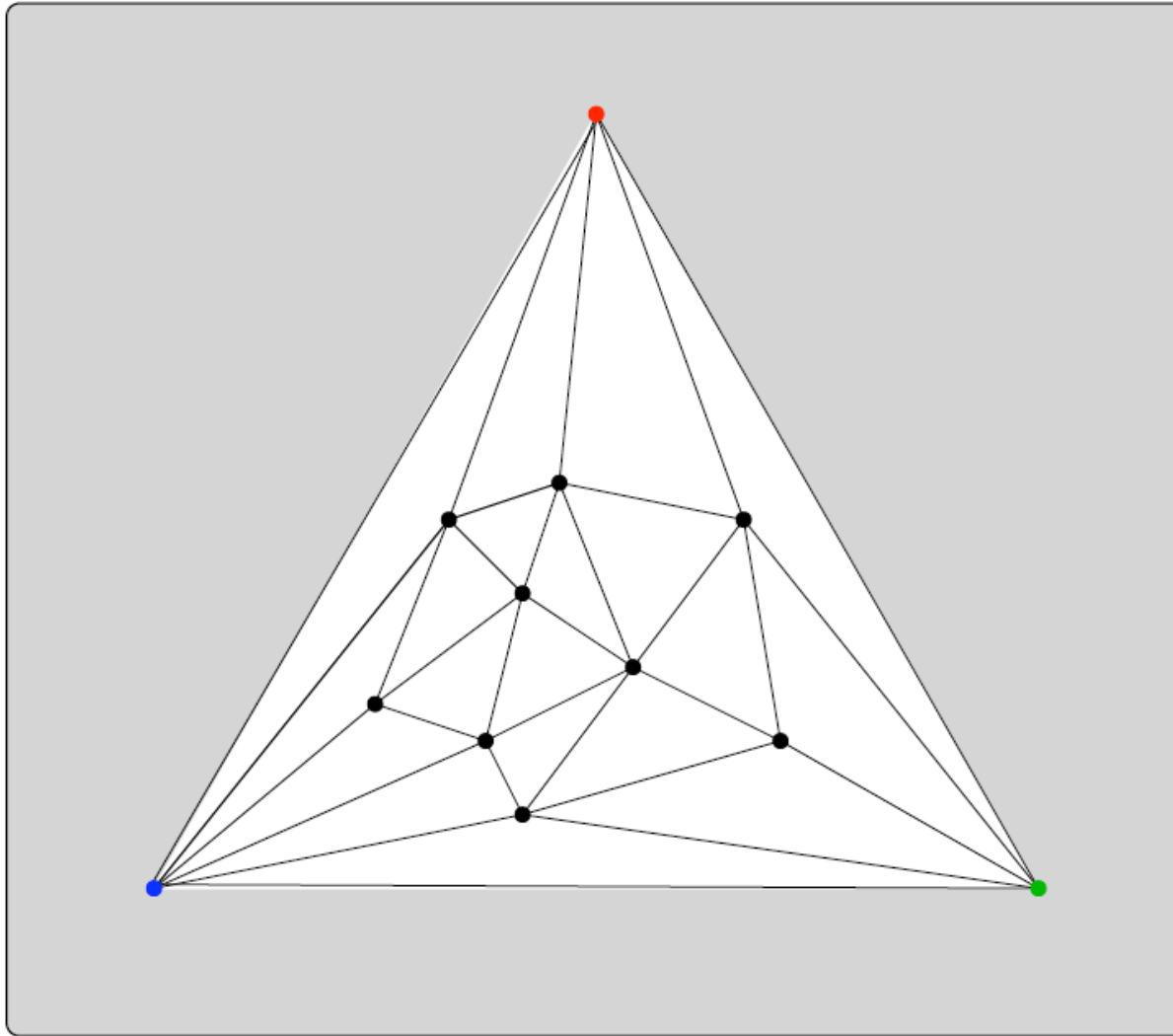
Toute triangulation plane admet un bois de Schnyder [Schnyder'89]

Propriété fondamentale

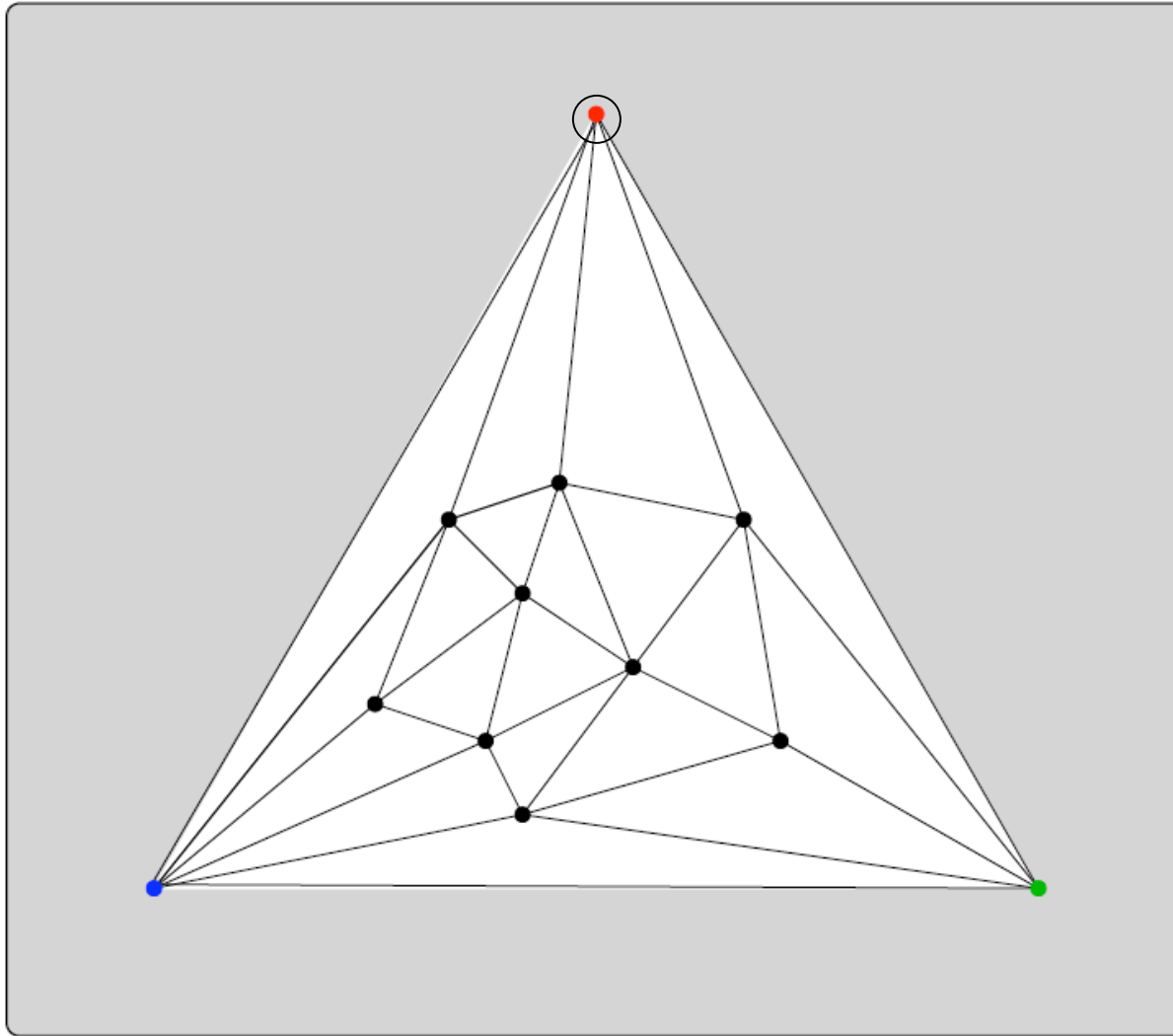
- Bois de Schnyder $\rightarrow$ 3 arbres couvrants (un en chaque couleur)



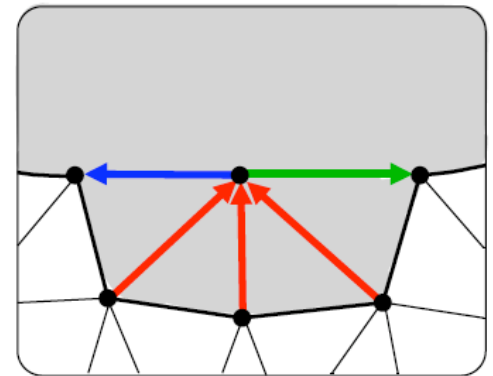
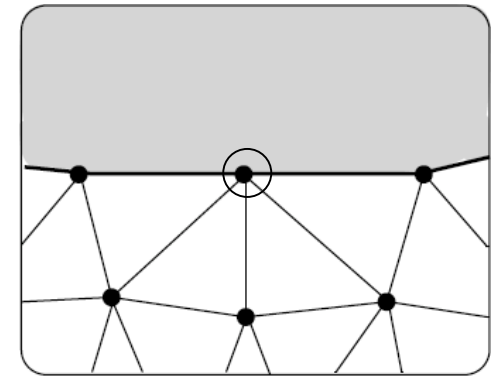
Epluchage -> Bois de Schnyder



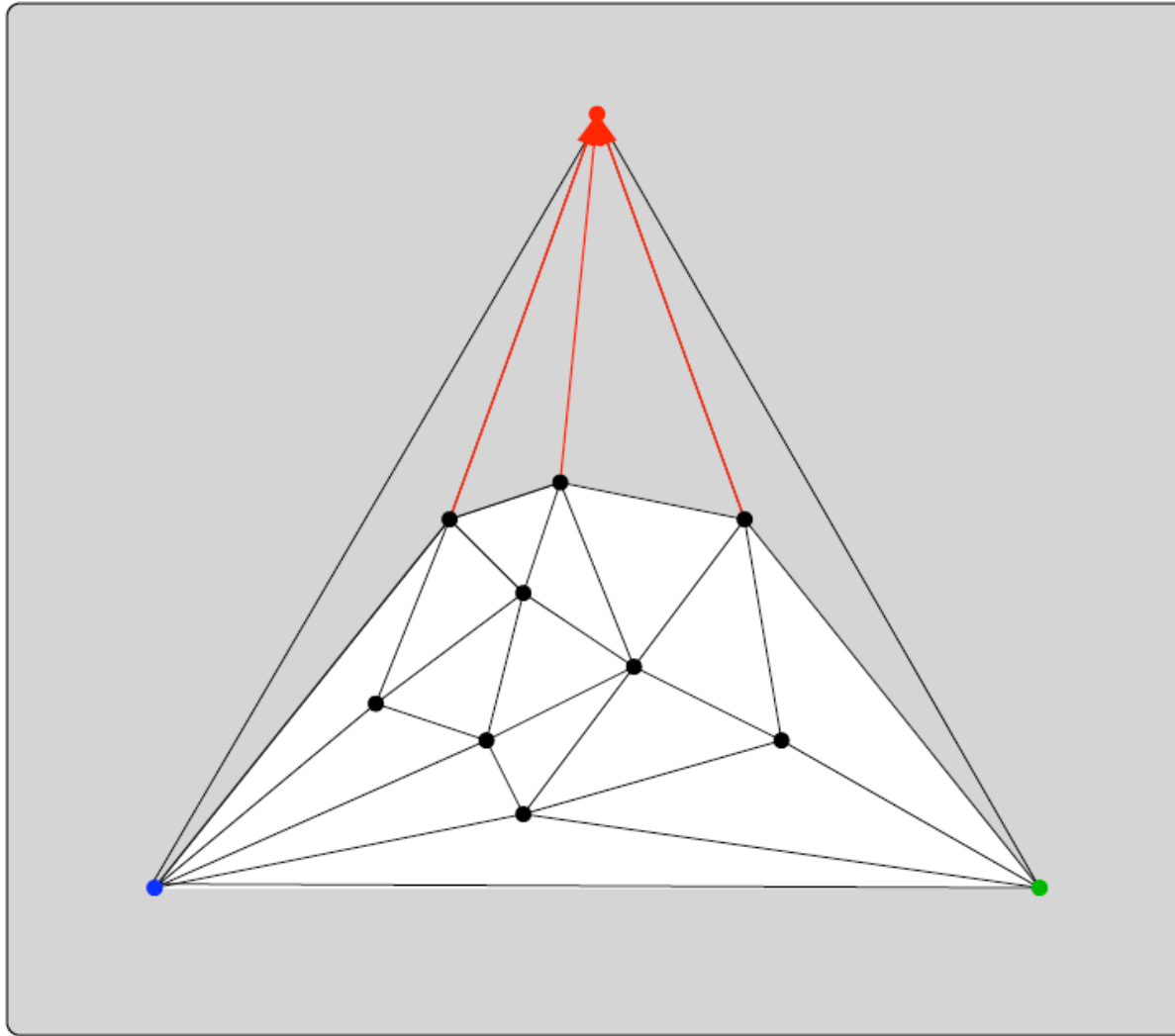
Epluchage -> Bois de Schnyder



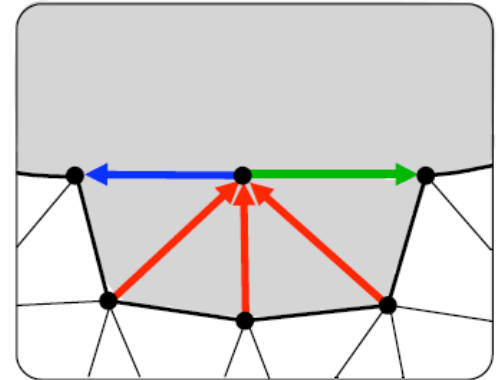
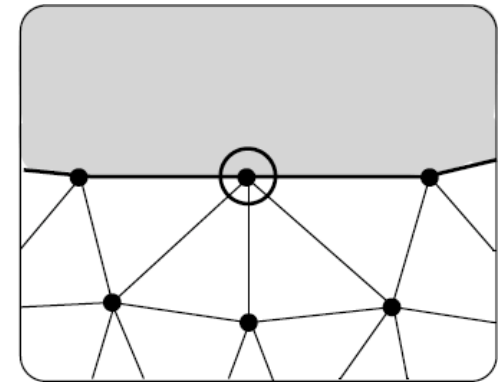
Chaque étape:



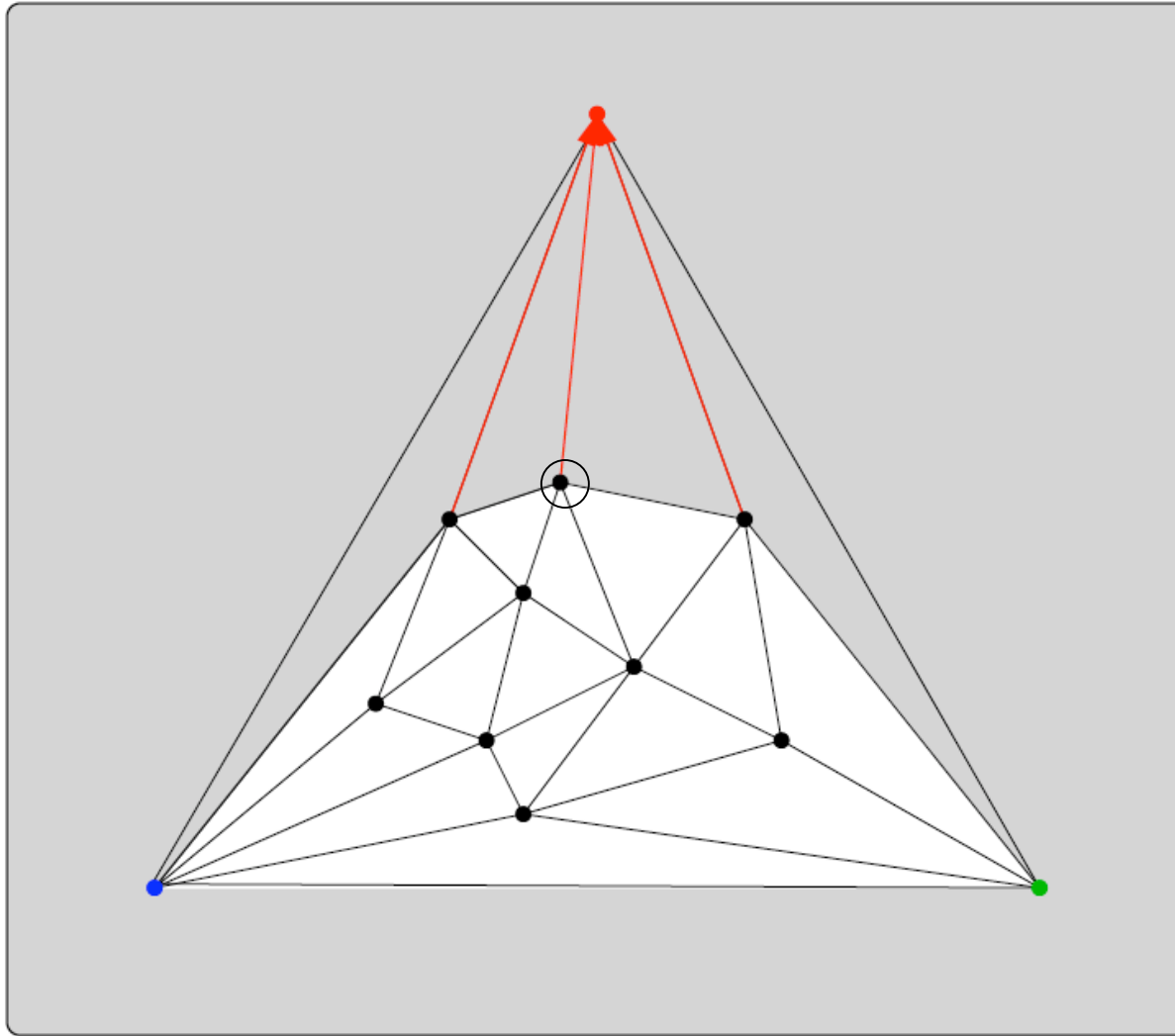
Epluchage -> Bois de Schnyder



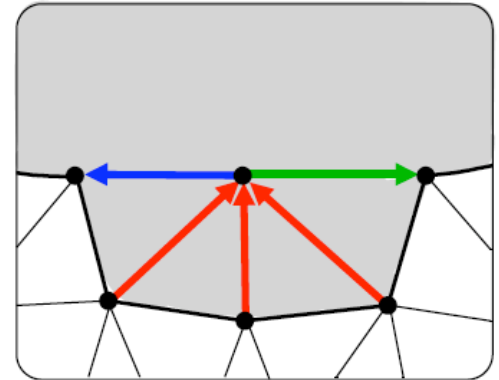
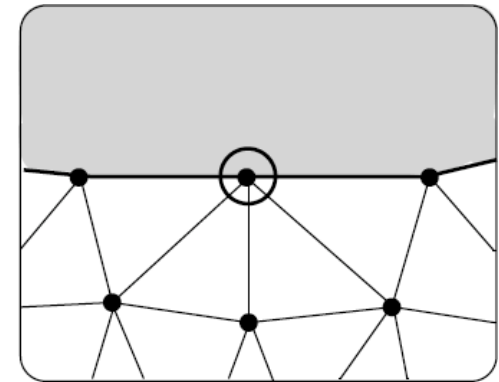
Chaque étape:



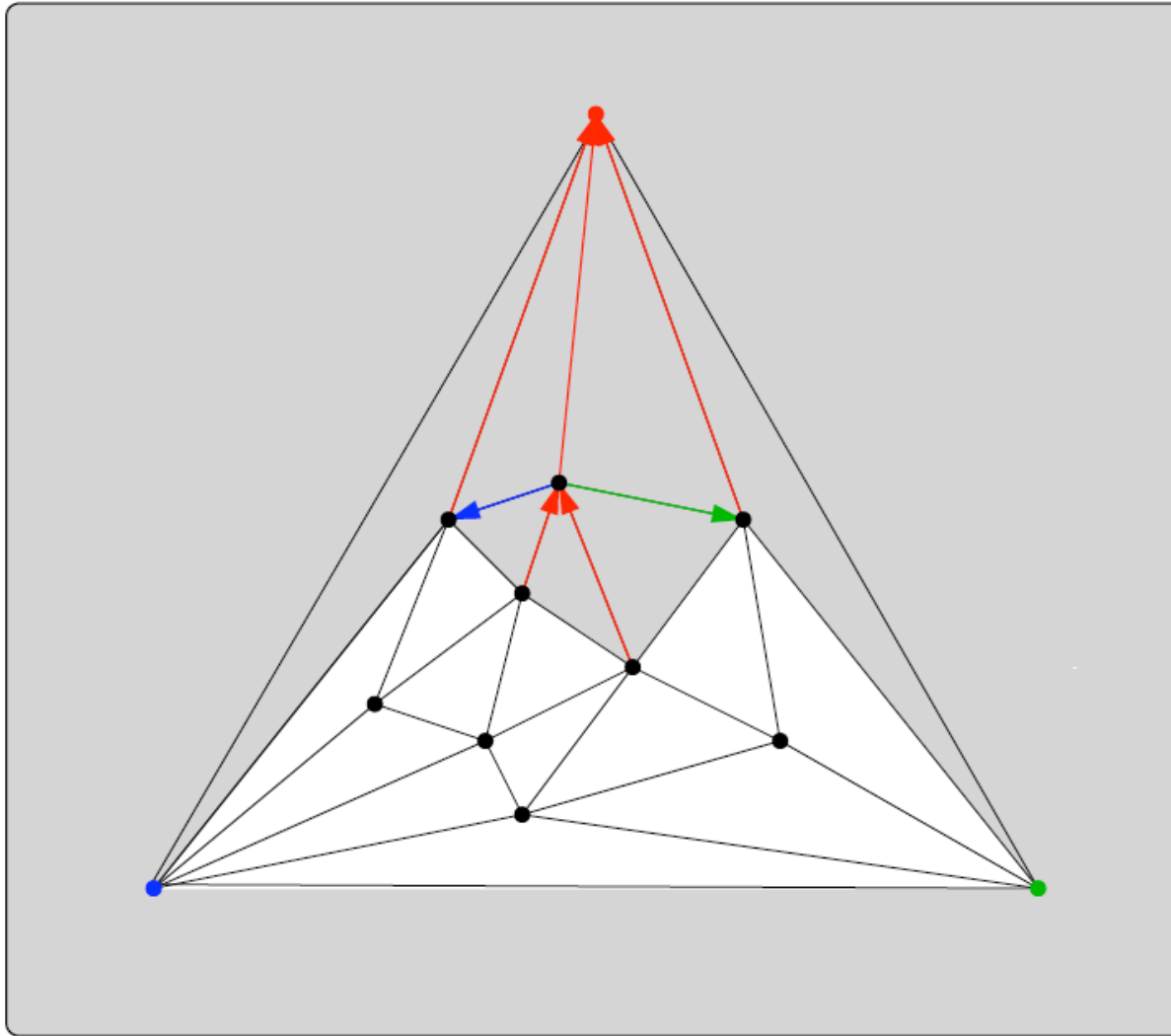
Epluchage -> Bois de Schnyder



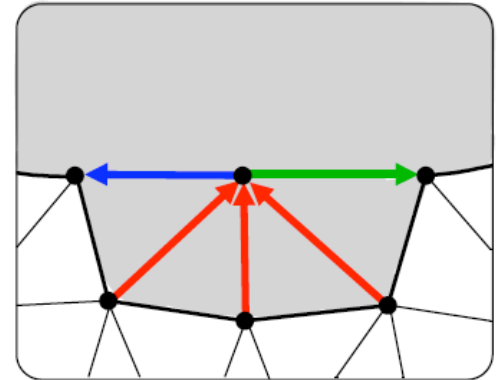
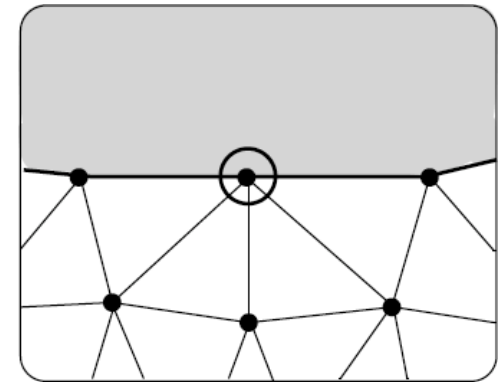
Chaque étape:



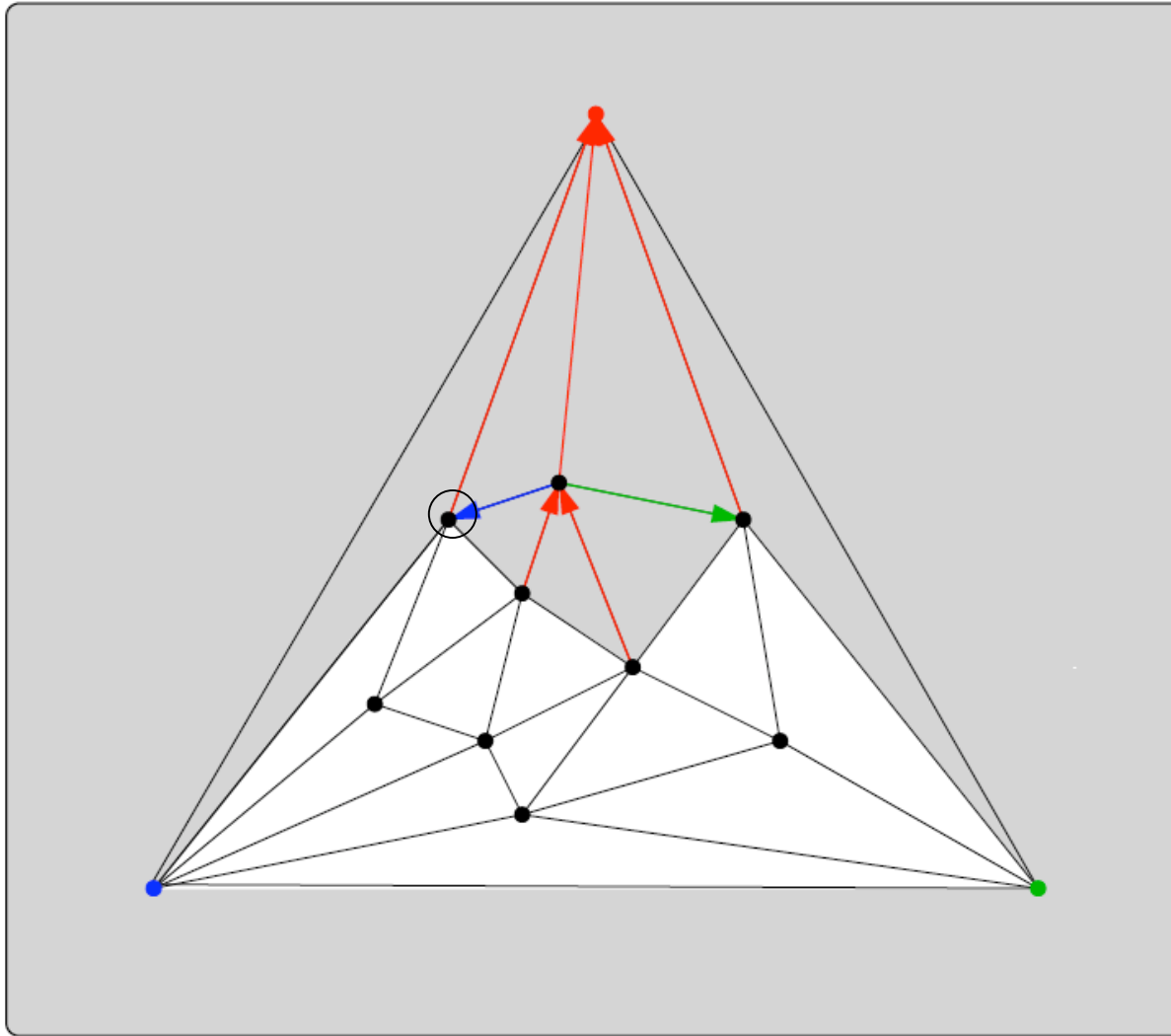
Epluchage -> Bois de Schnyder



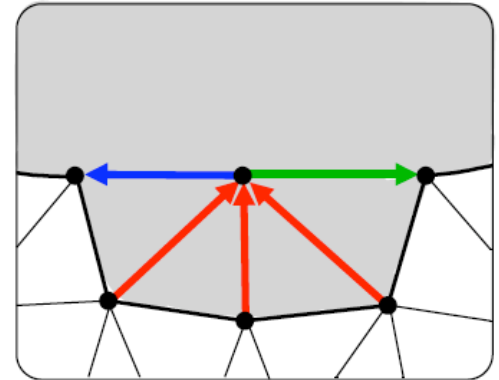
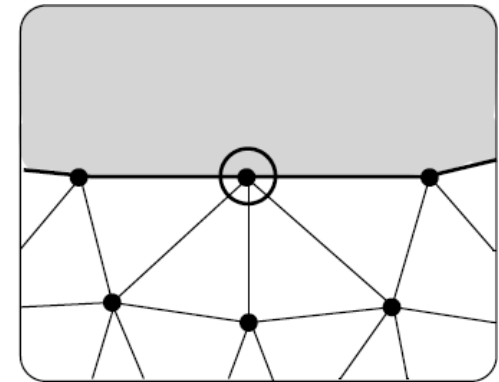
Chaque étape:



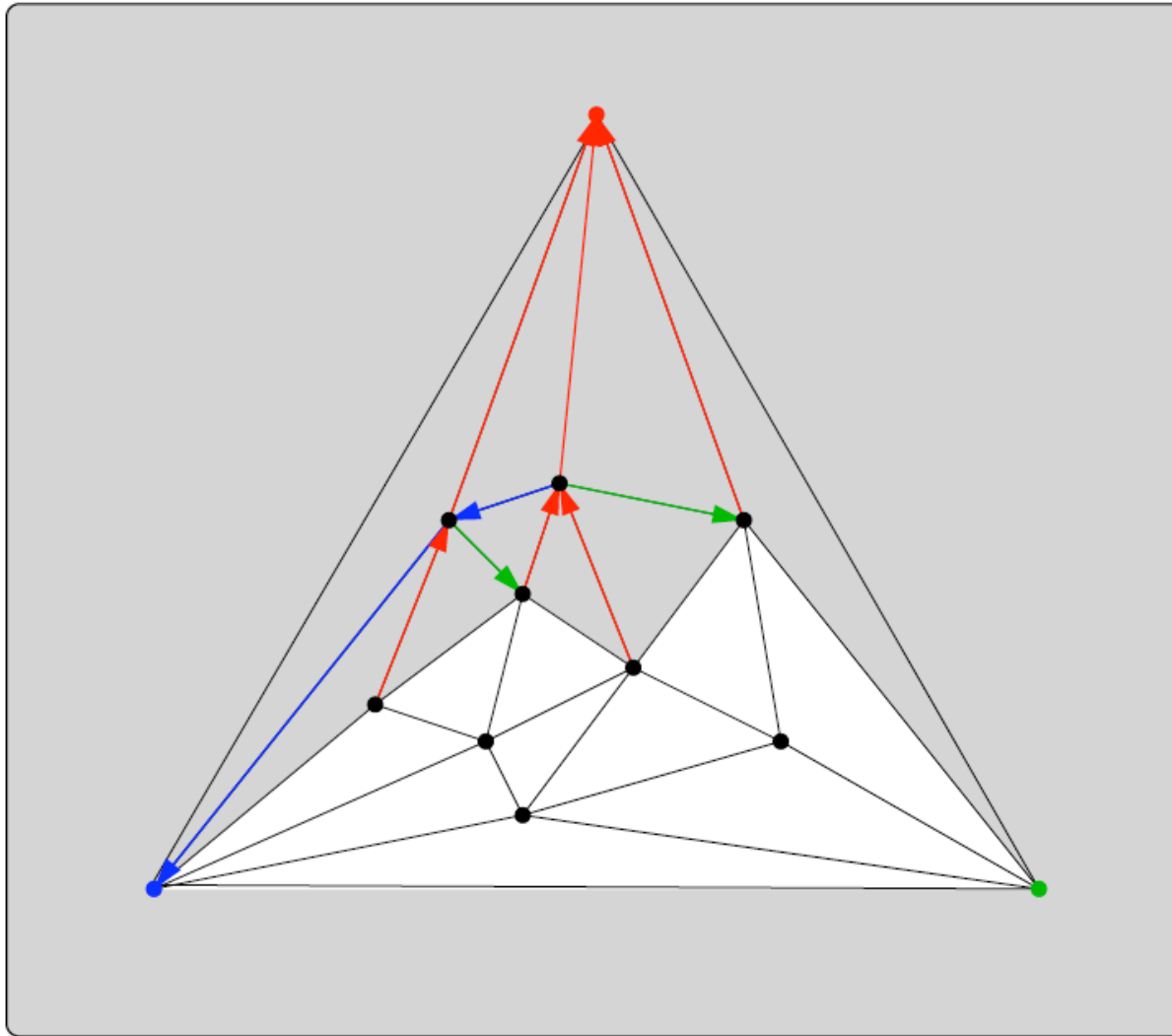
Epluchage -> Bois de Schnyder



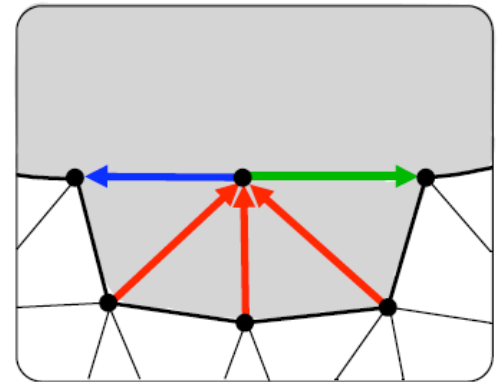
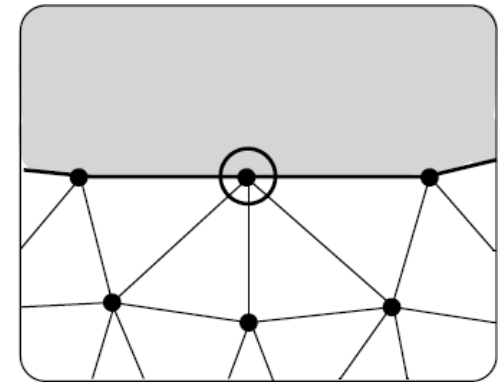
Chaque étape:



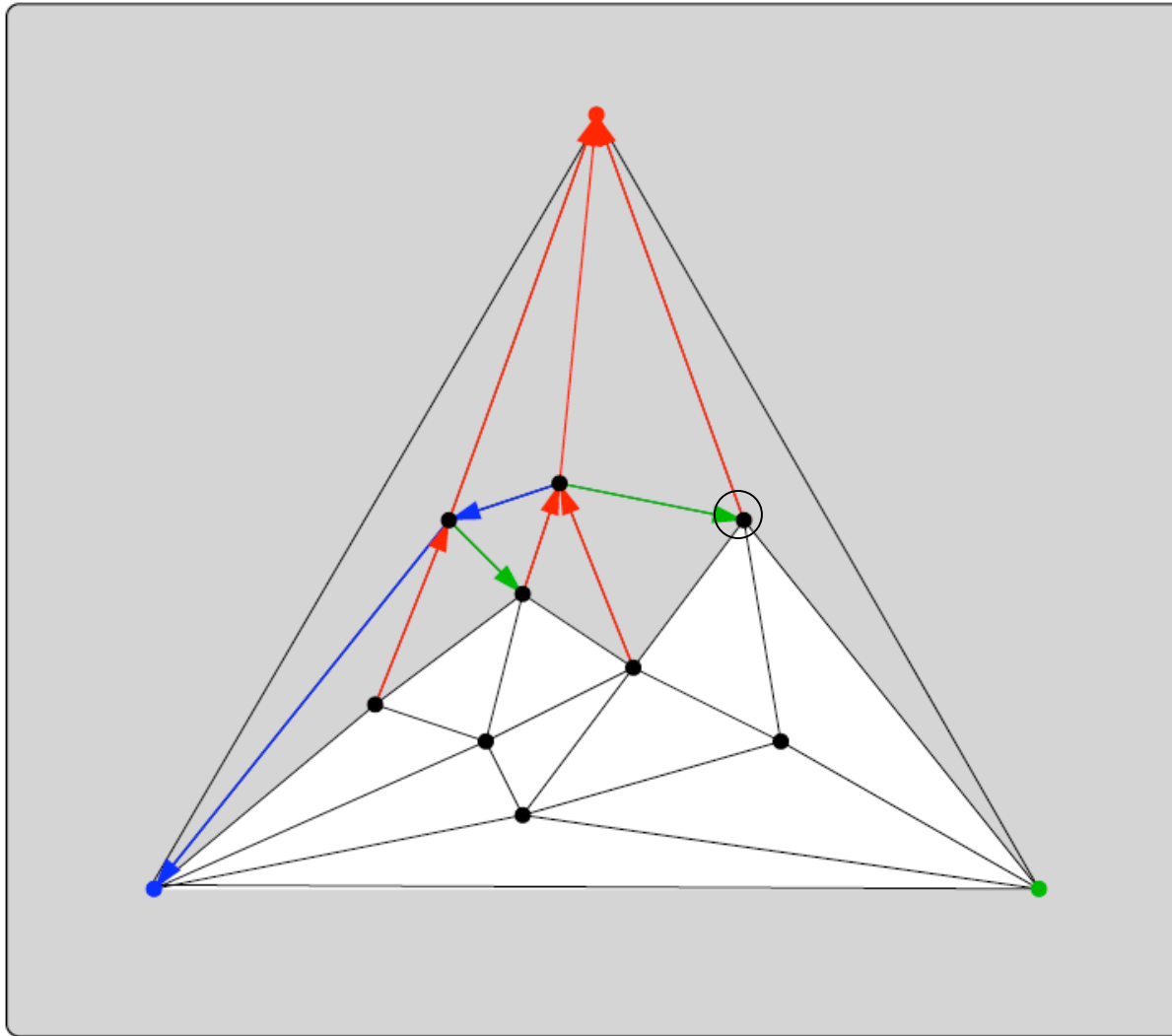
Epluchage -> Bois de Schnyder



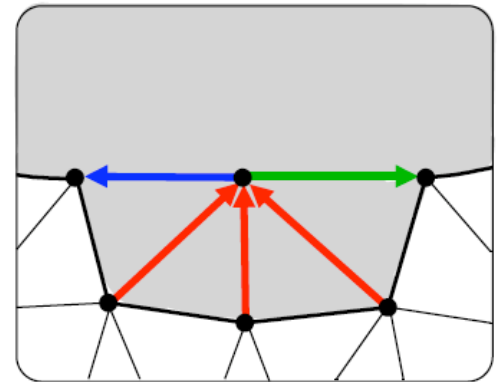
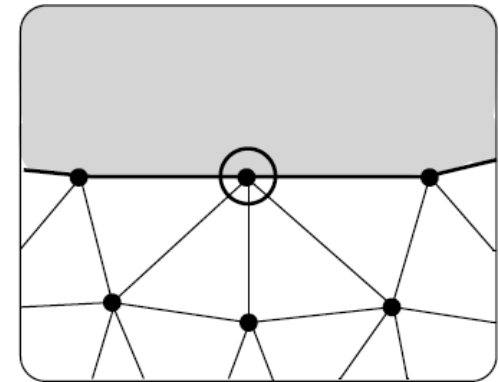
Chaque étape:



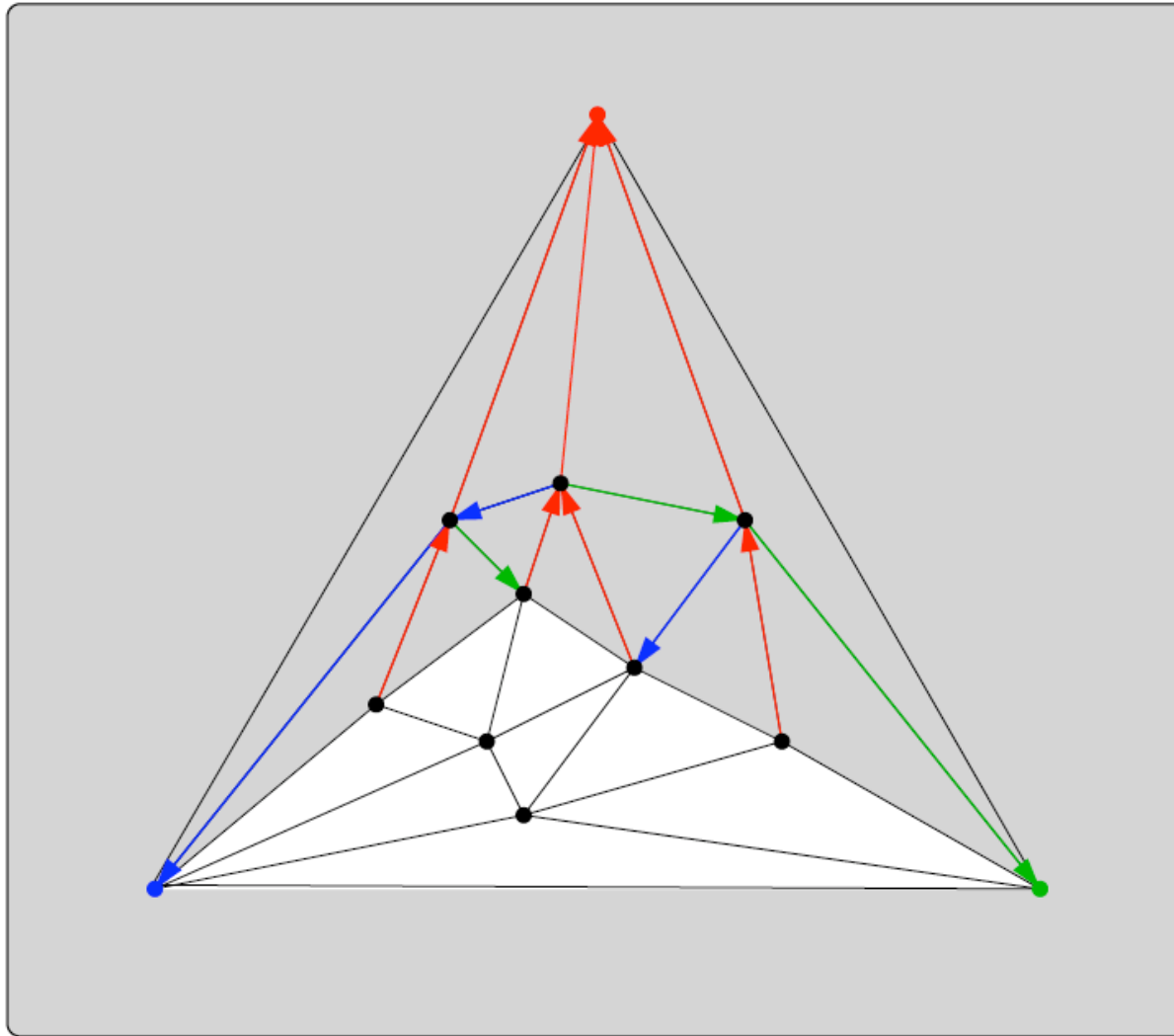
Epluchage -> Bois de Schnyder



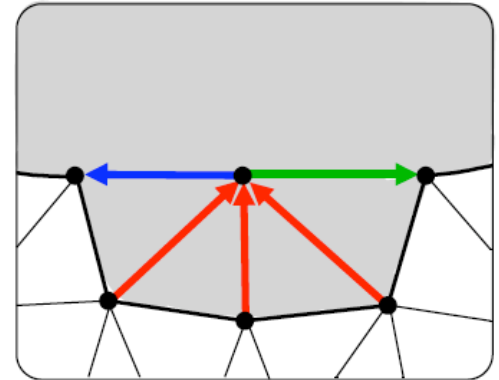
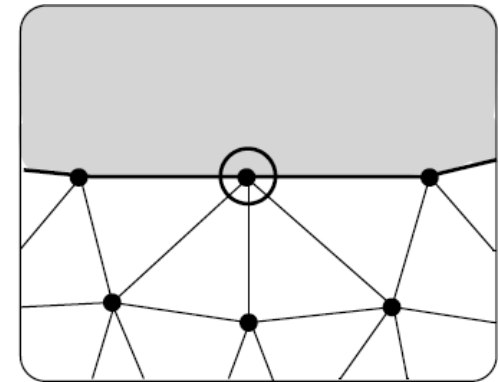
Chaque étape:



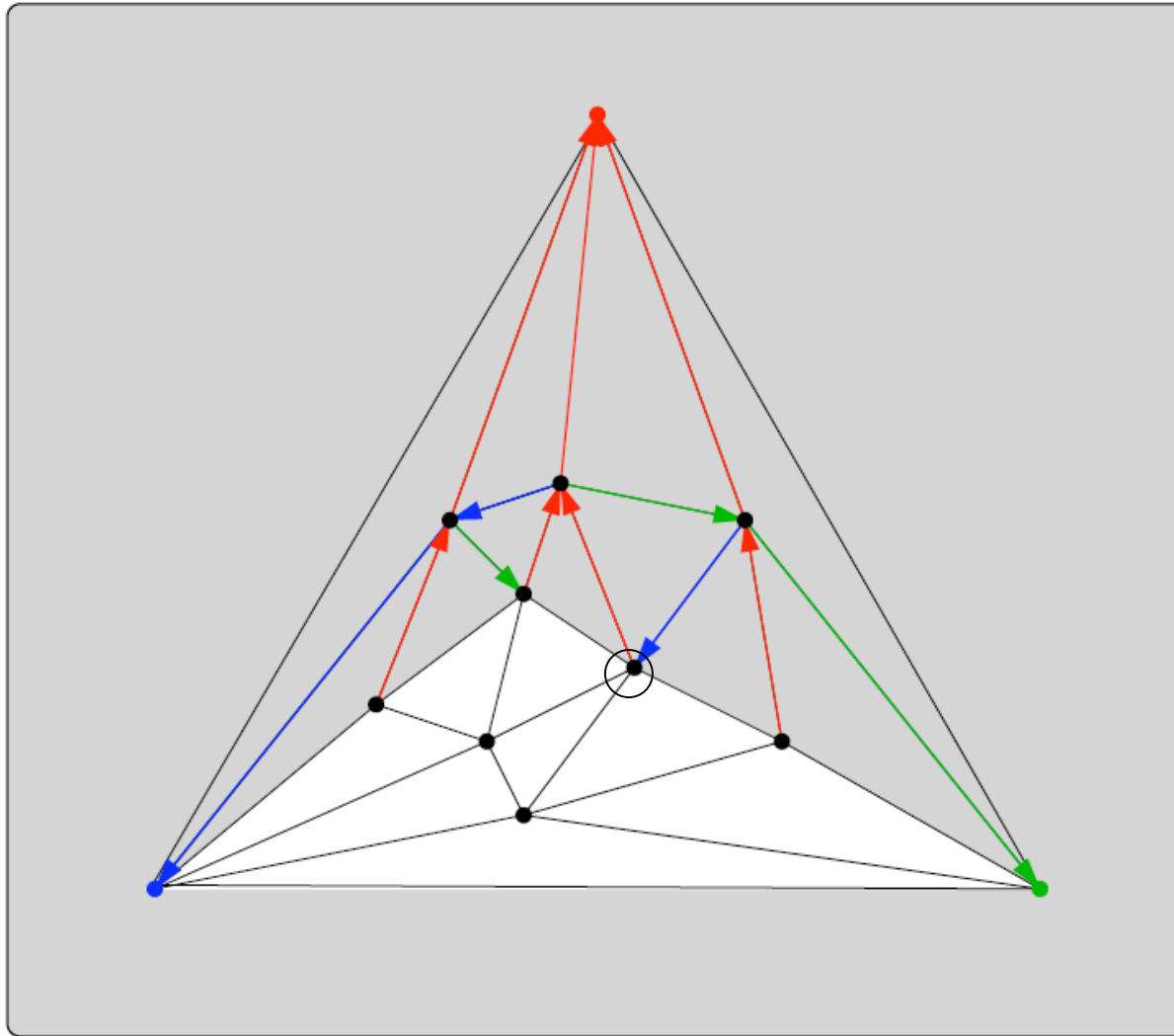
Epluchage -> Bois de Schnyder



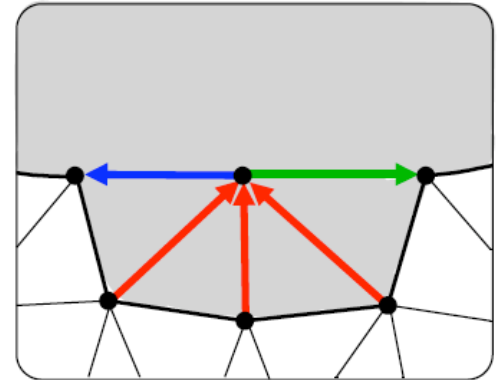
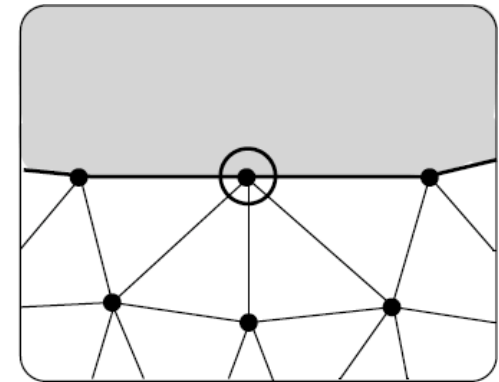
Chaque étape:



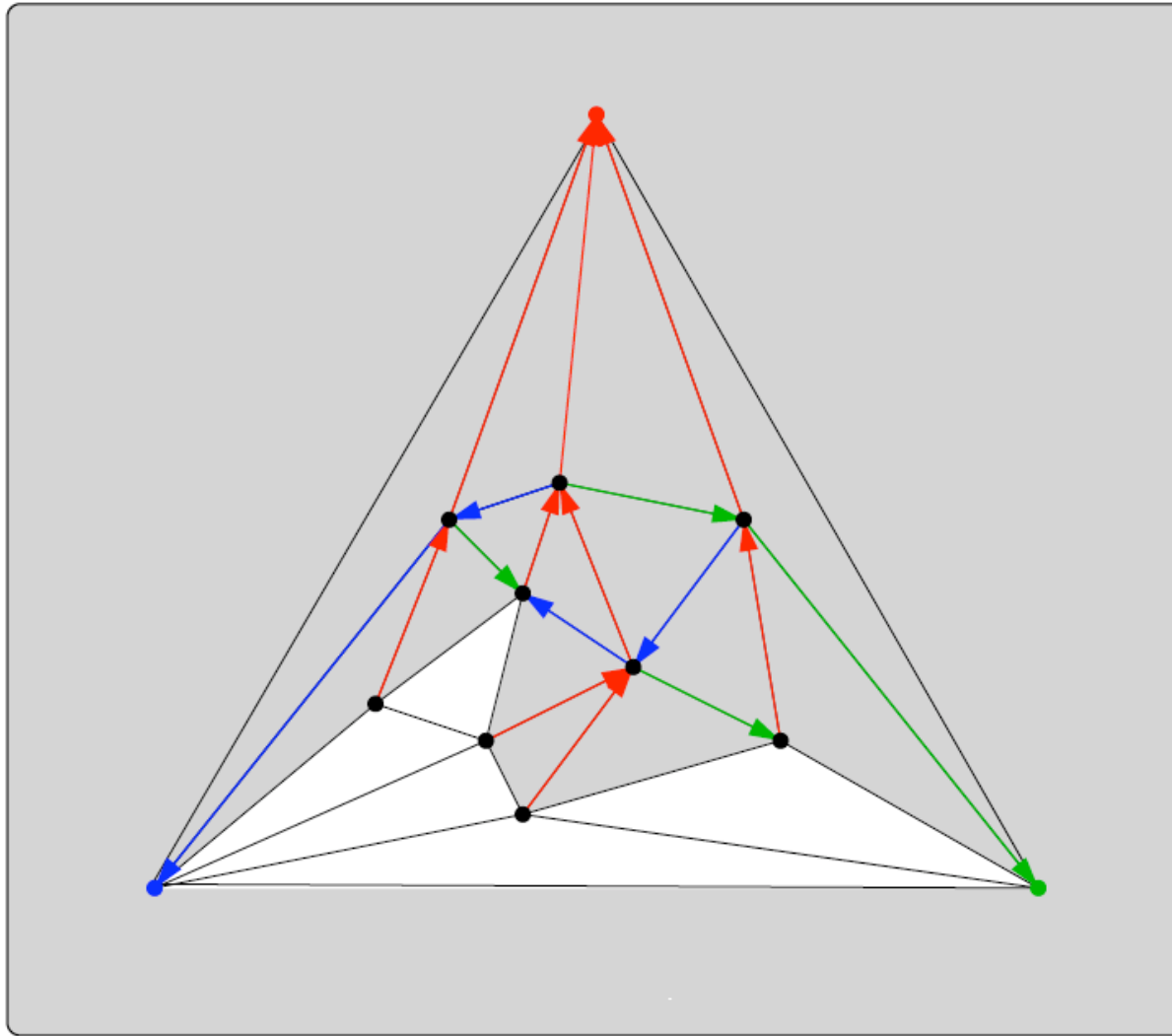
Epluchage -> Bois de Schnyder



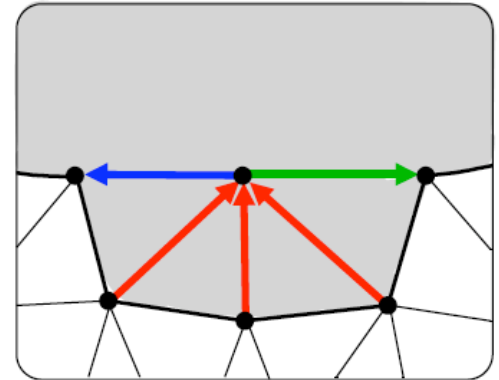
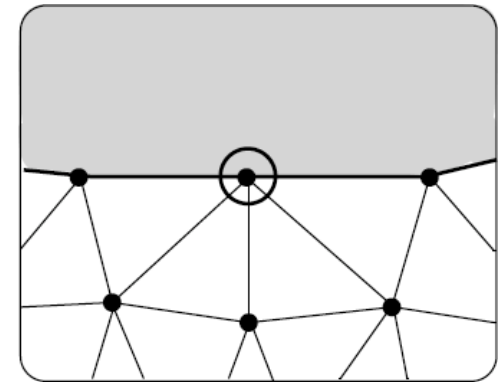
Chaque étape:



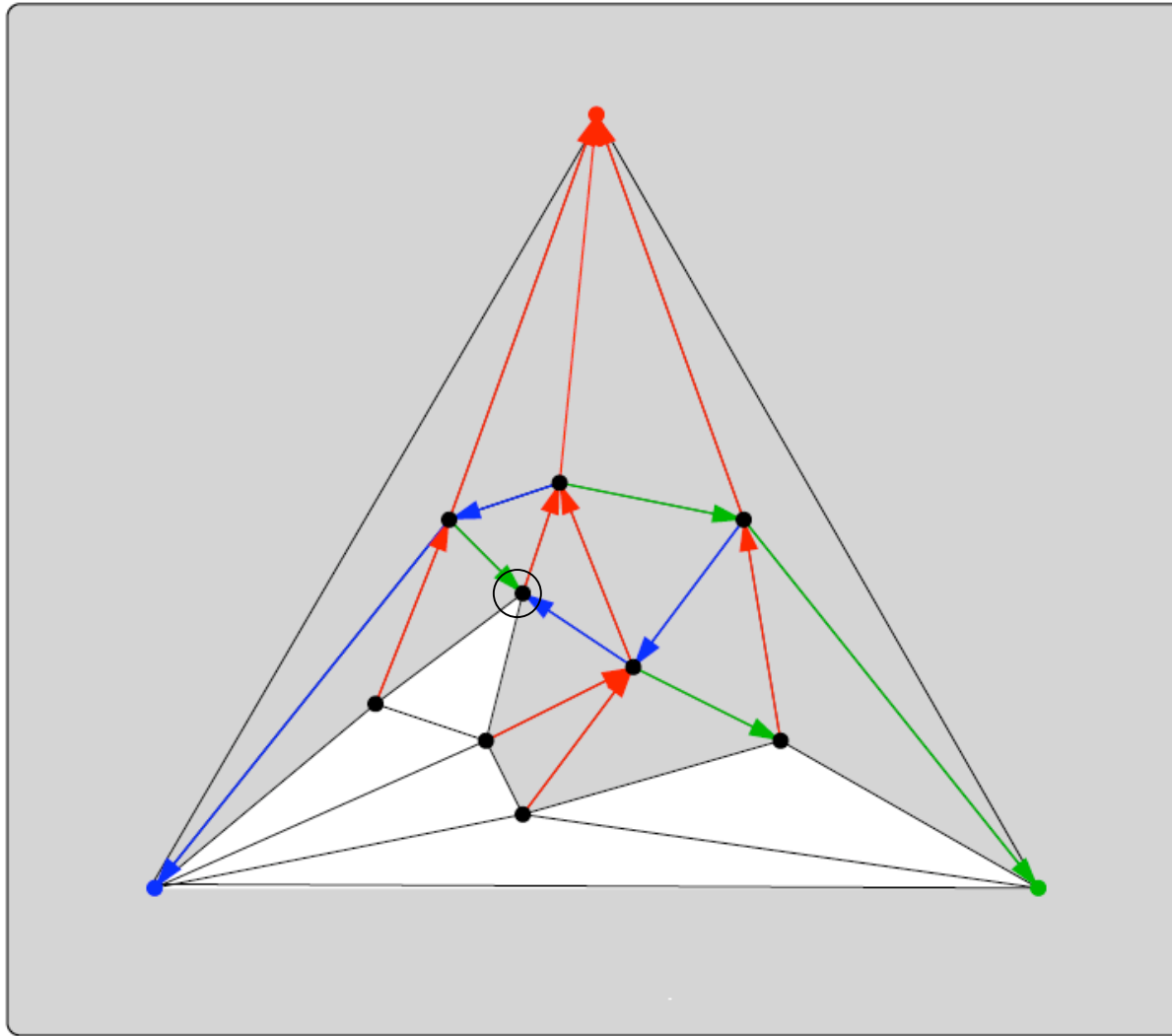
Epluchage -> Bois de Schnyder



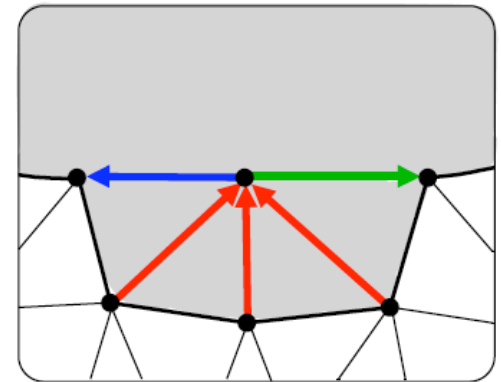
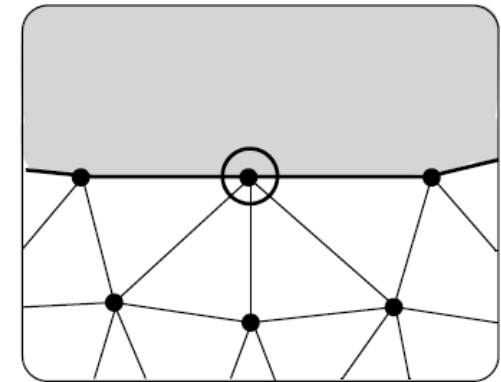
Chaque étape:



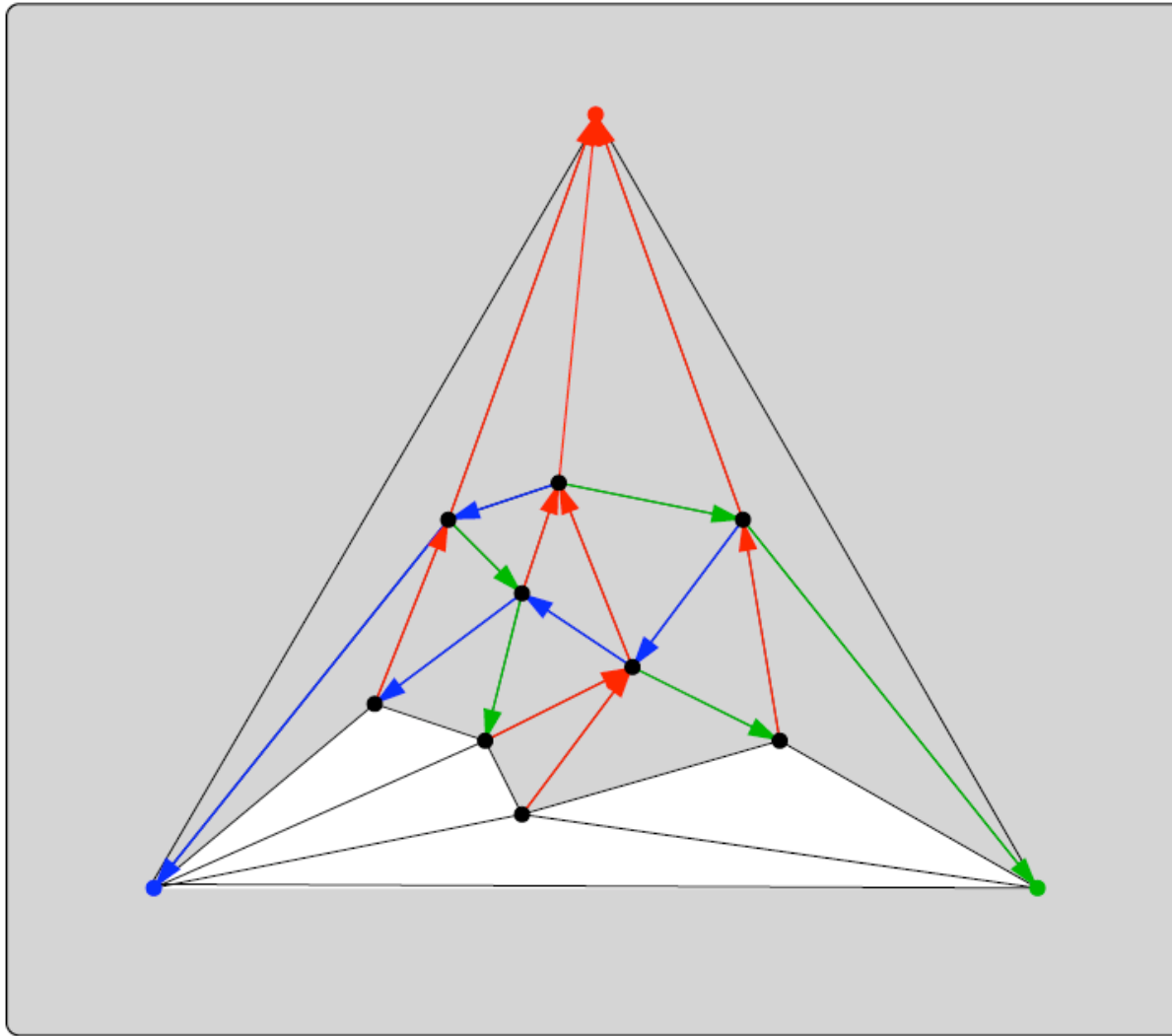
Epluchage -> Bois de Schnyder



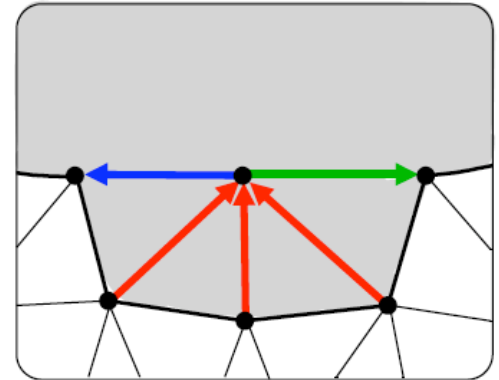
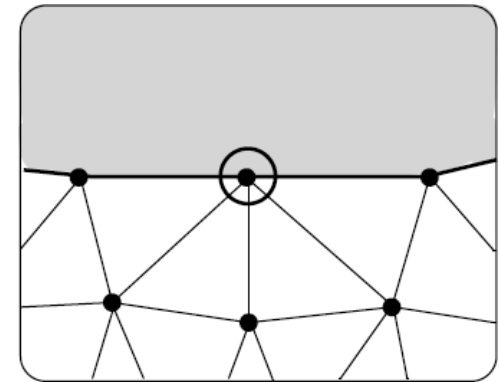
Chaque étape:



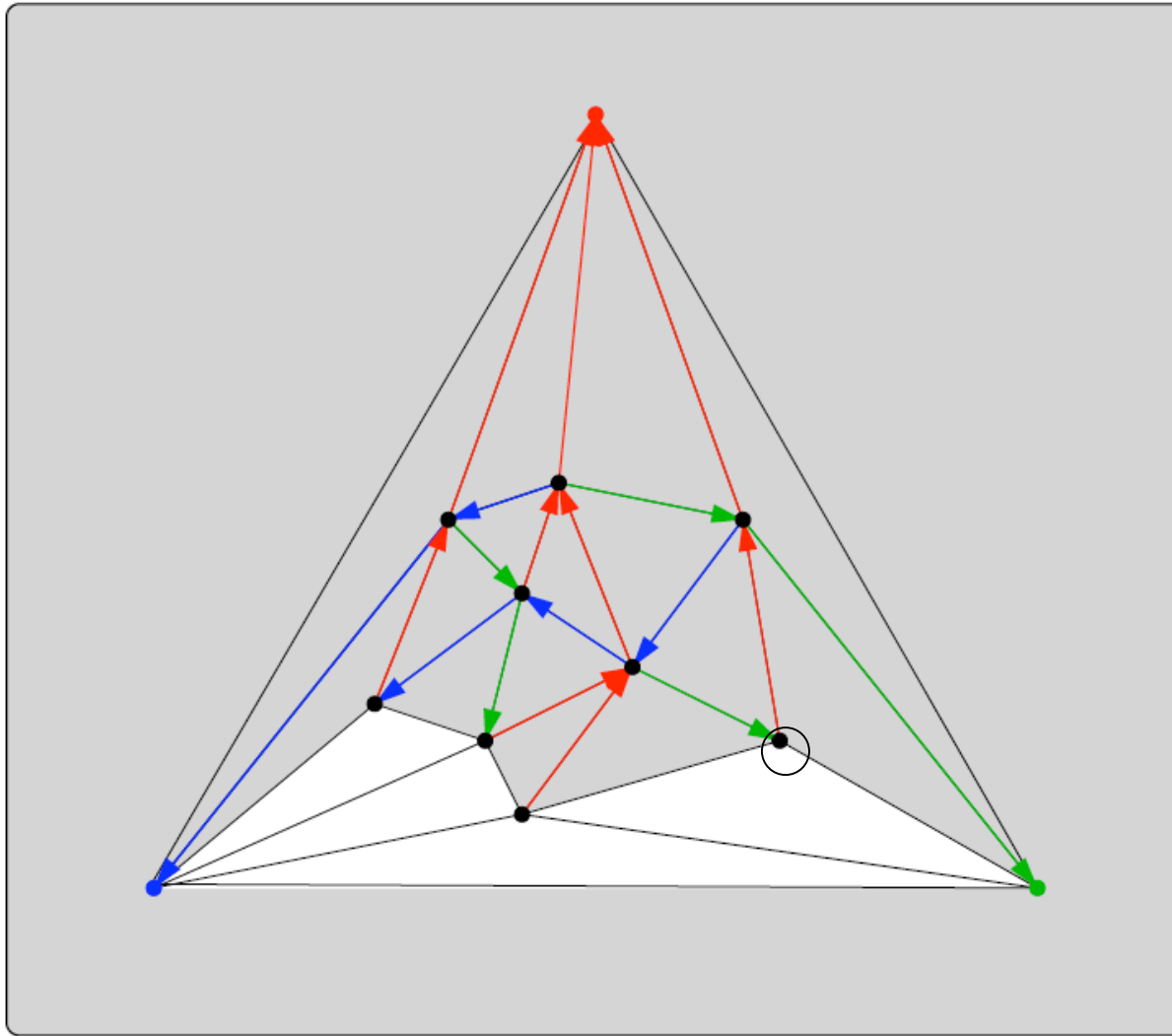
Epluchage -> Bois de Schnyder



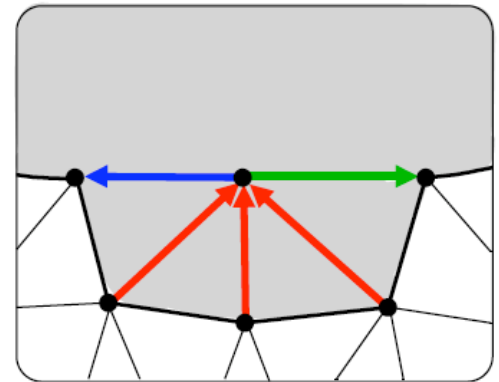
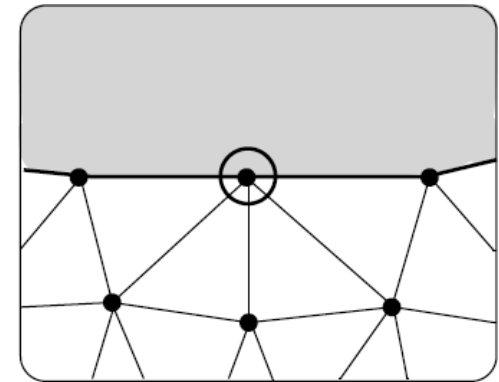
Chaque étape:



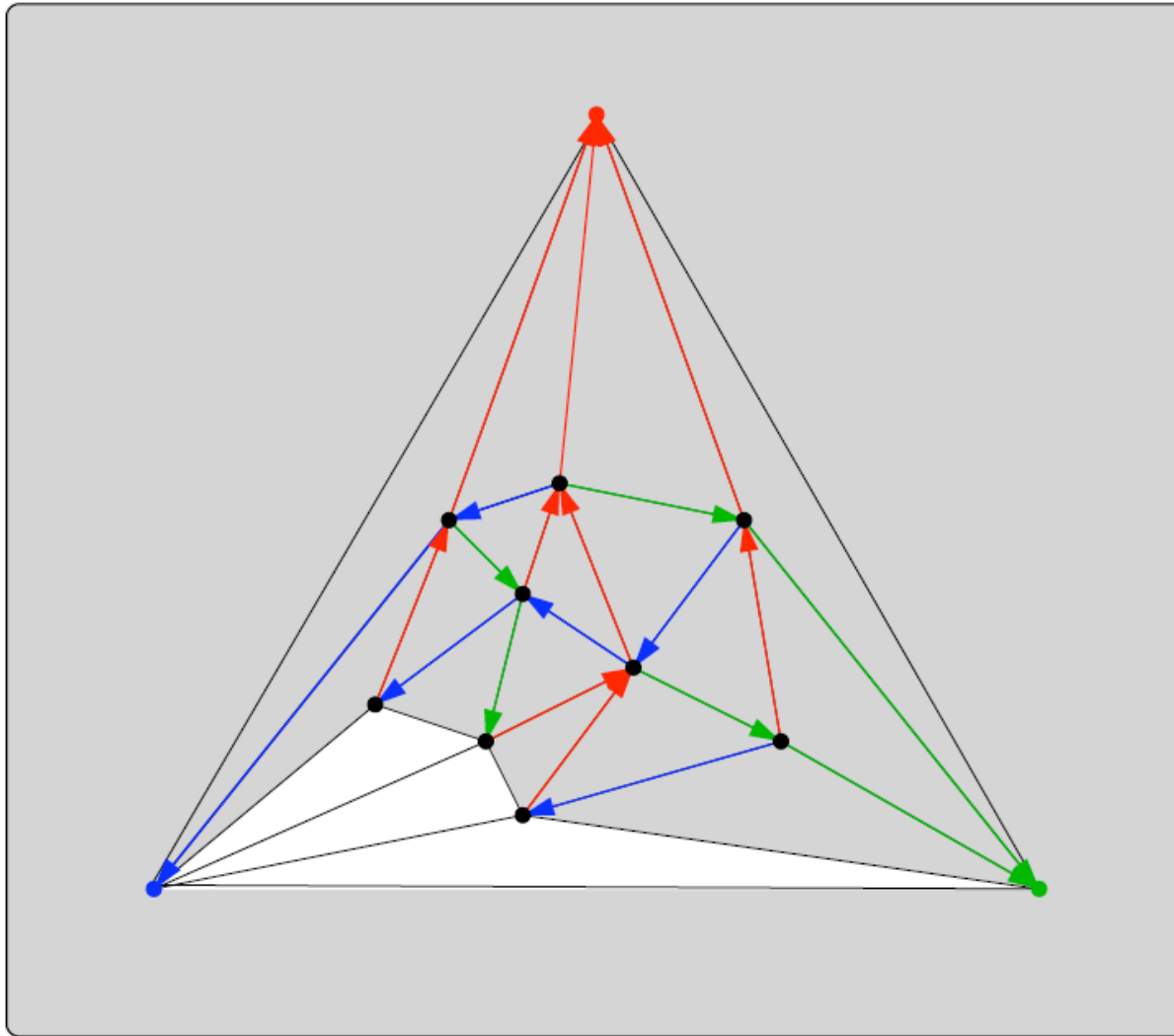
Epluchage -> Bois de Schnyder



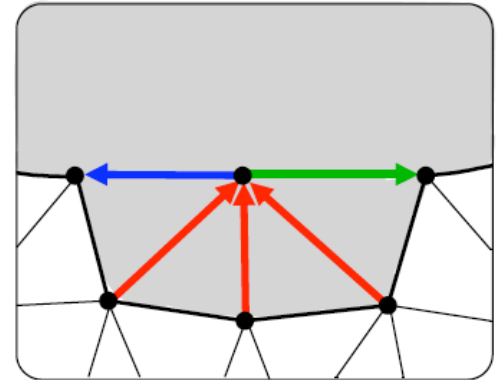
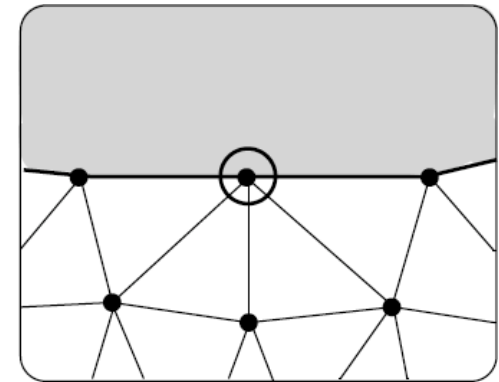
Chaque étape:



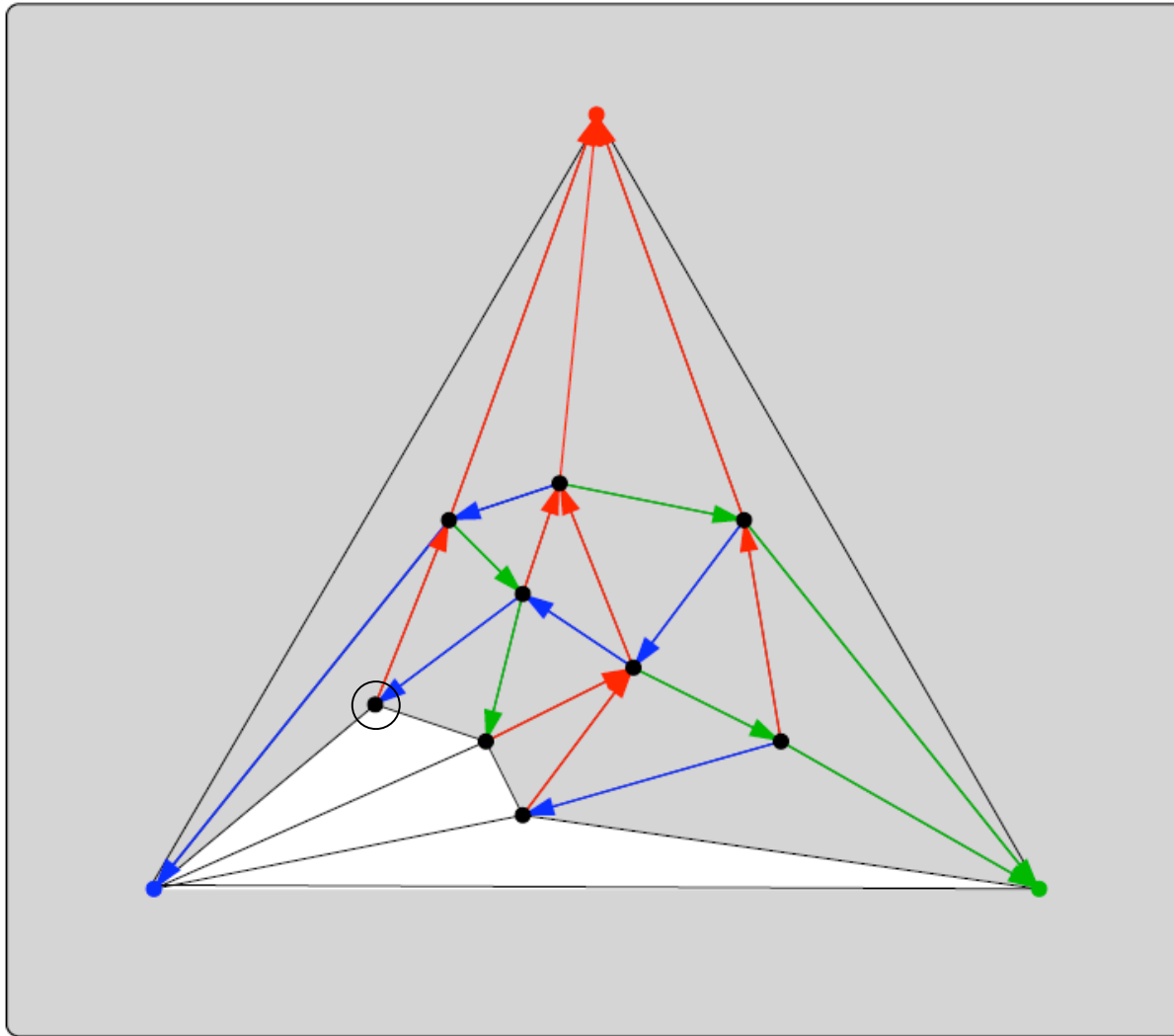
Epluchage -> Bois de Schnyder



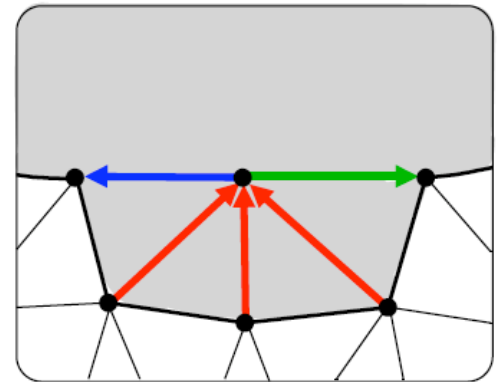
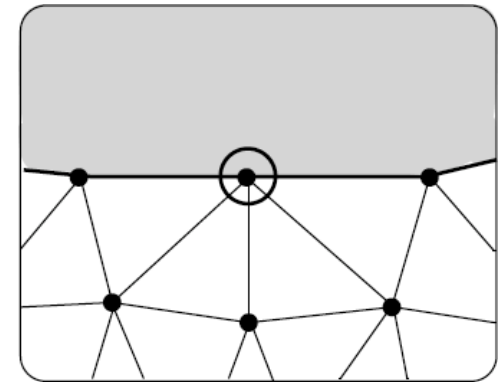
Chaque étape:



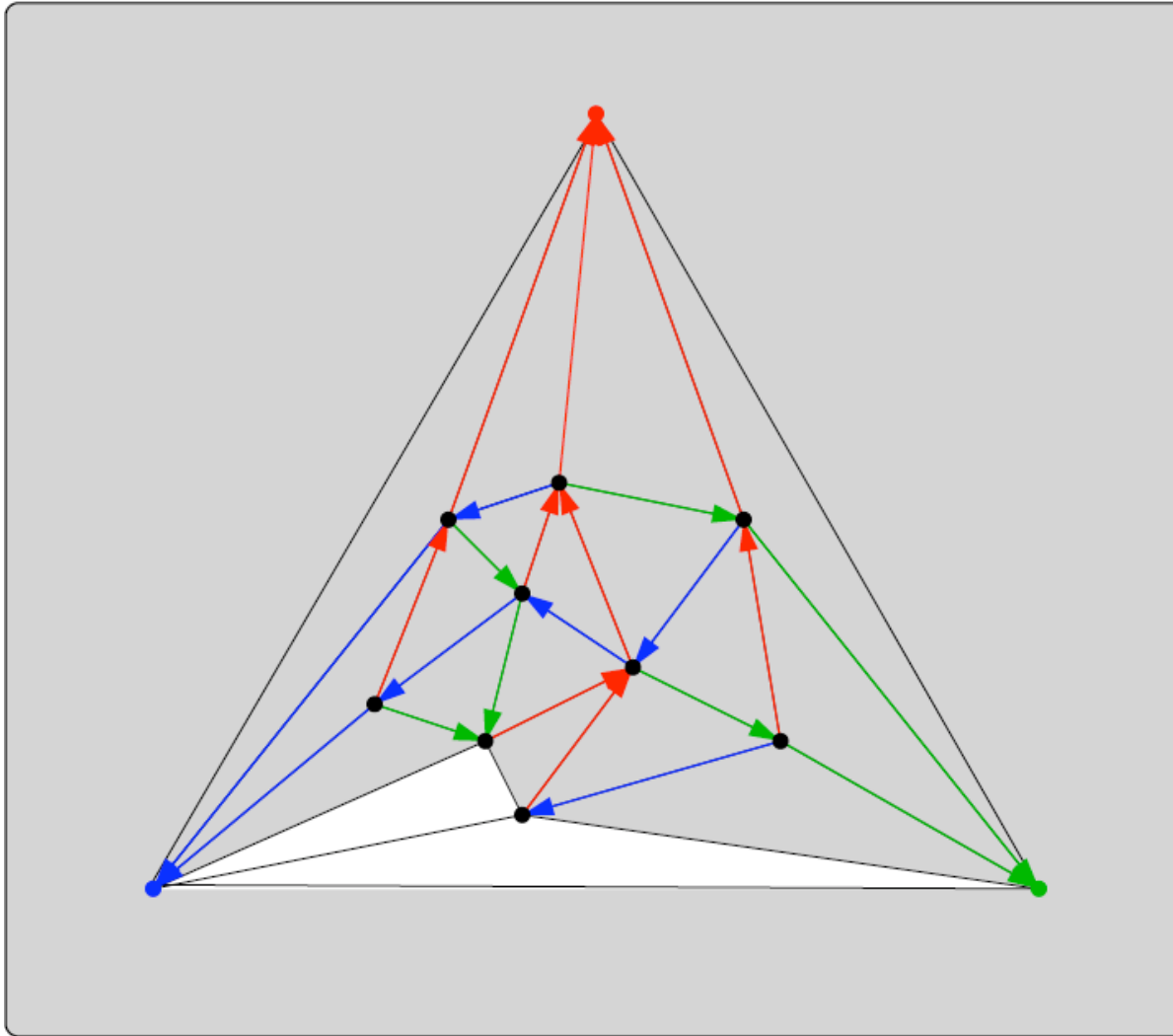
Epluchage -> Bois de Schnyder



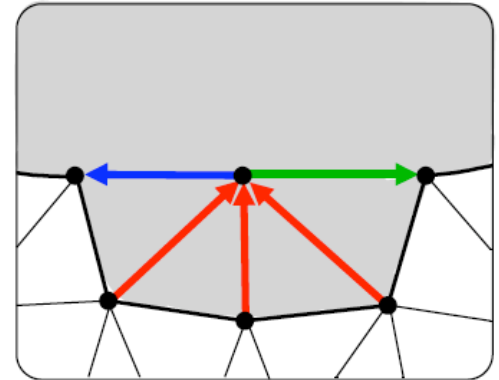
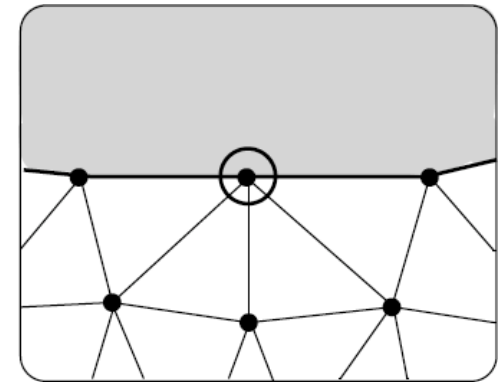
Chaque étape:



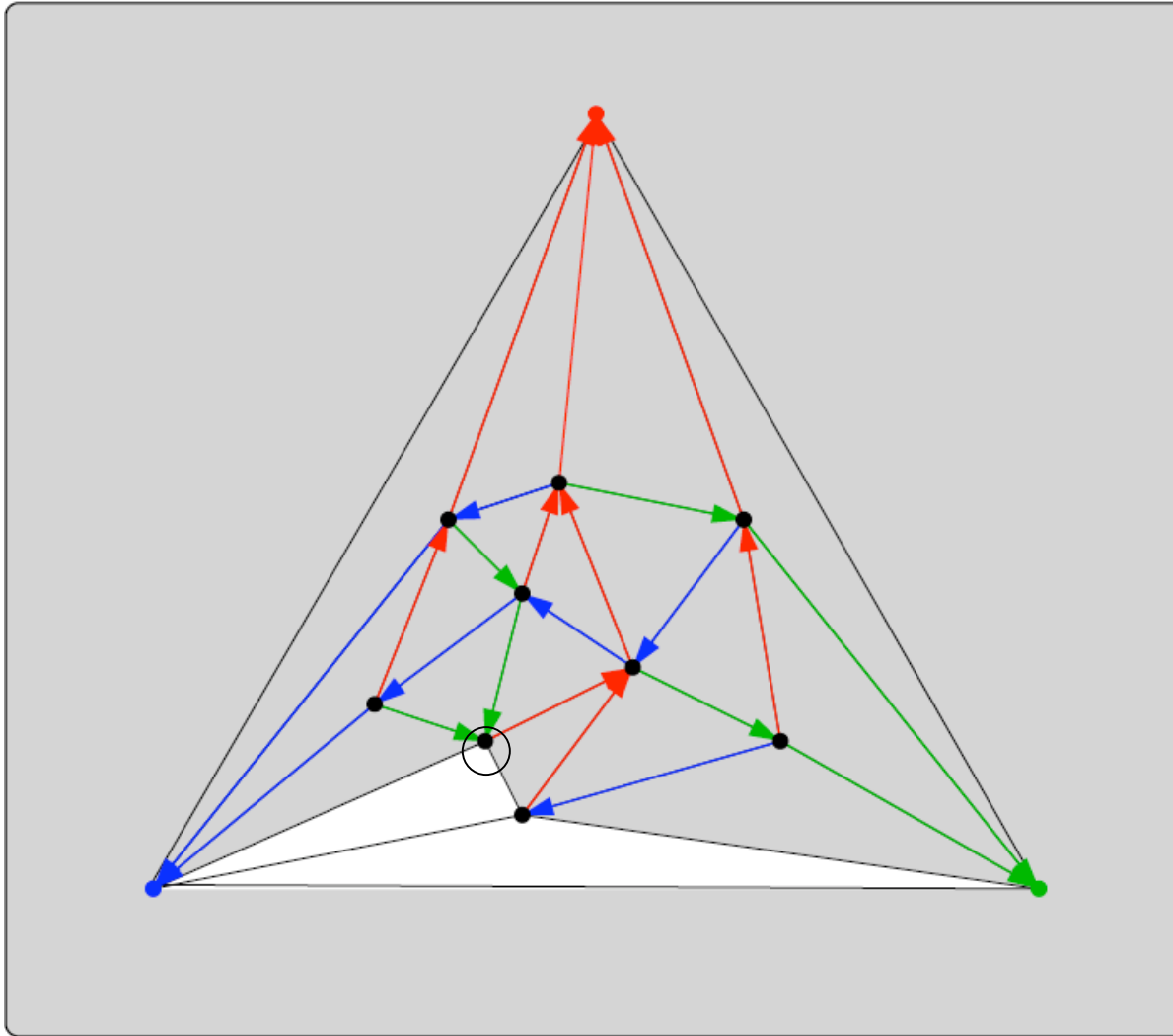
Epluchage -> Bois de Schnyder



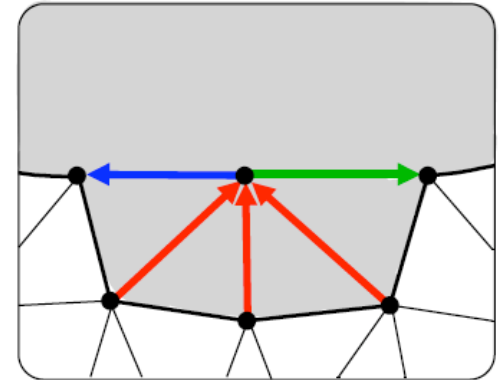
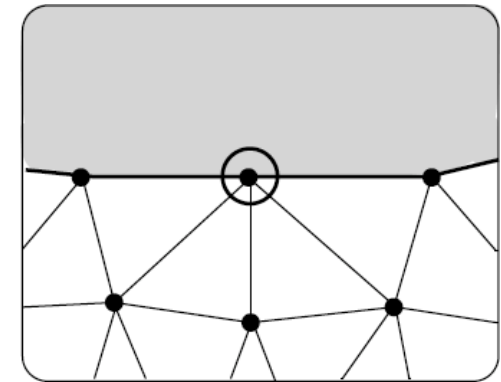
Chaque étape:



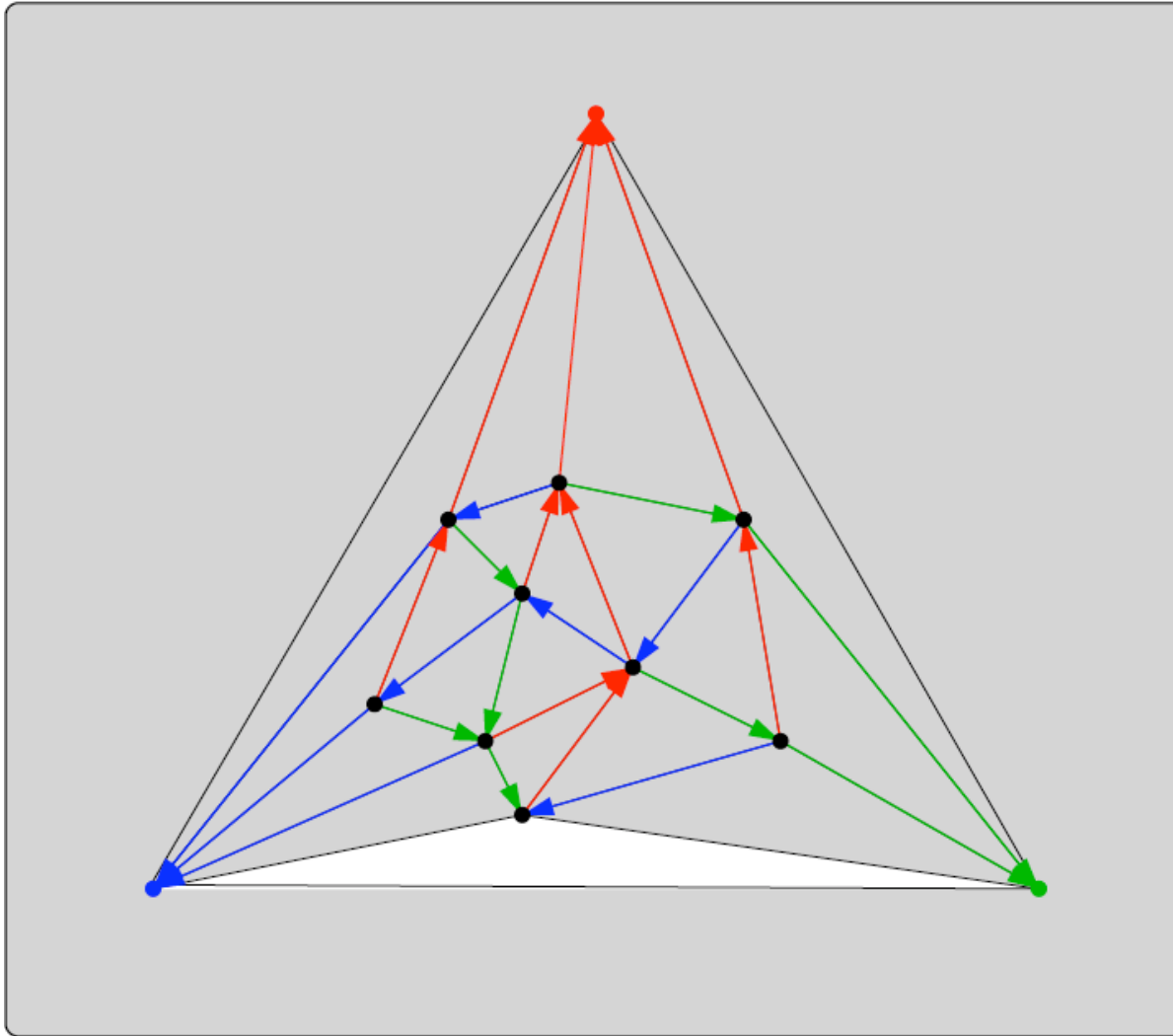
Epluchage -> Bois de Schnyder



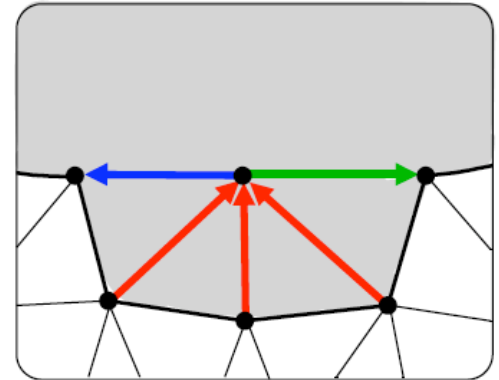
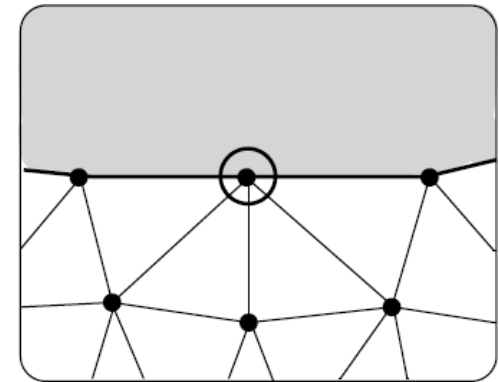
Chaque étape:



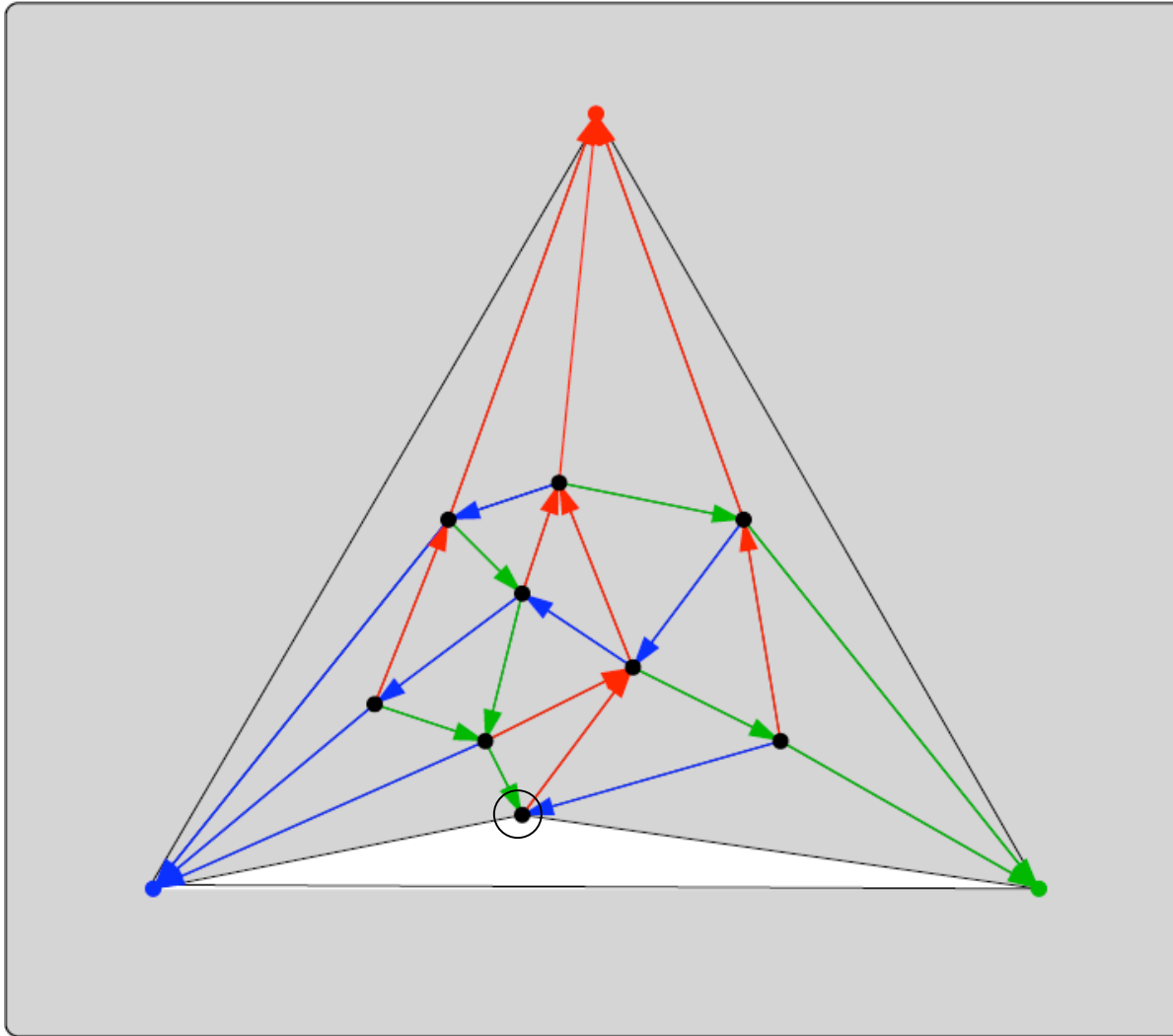
Epluchage -> Bois de Schnyder



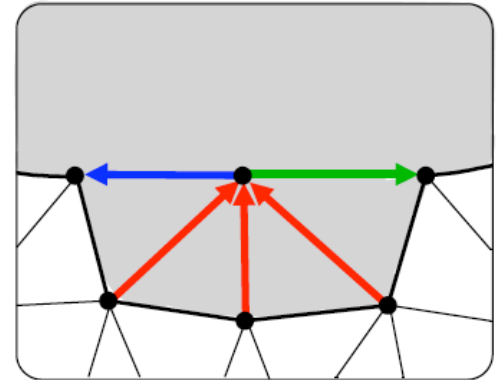
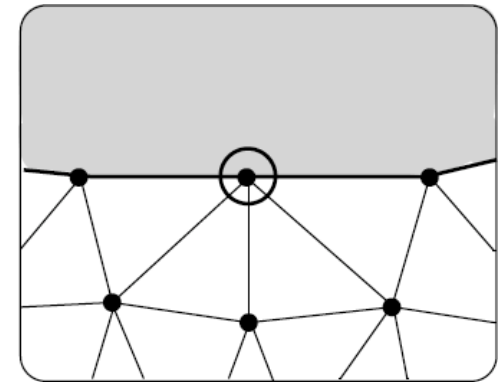
Chaque étape:



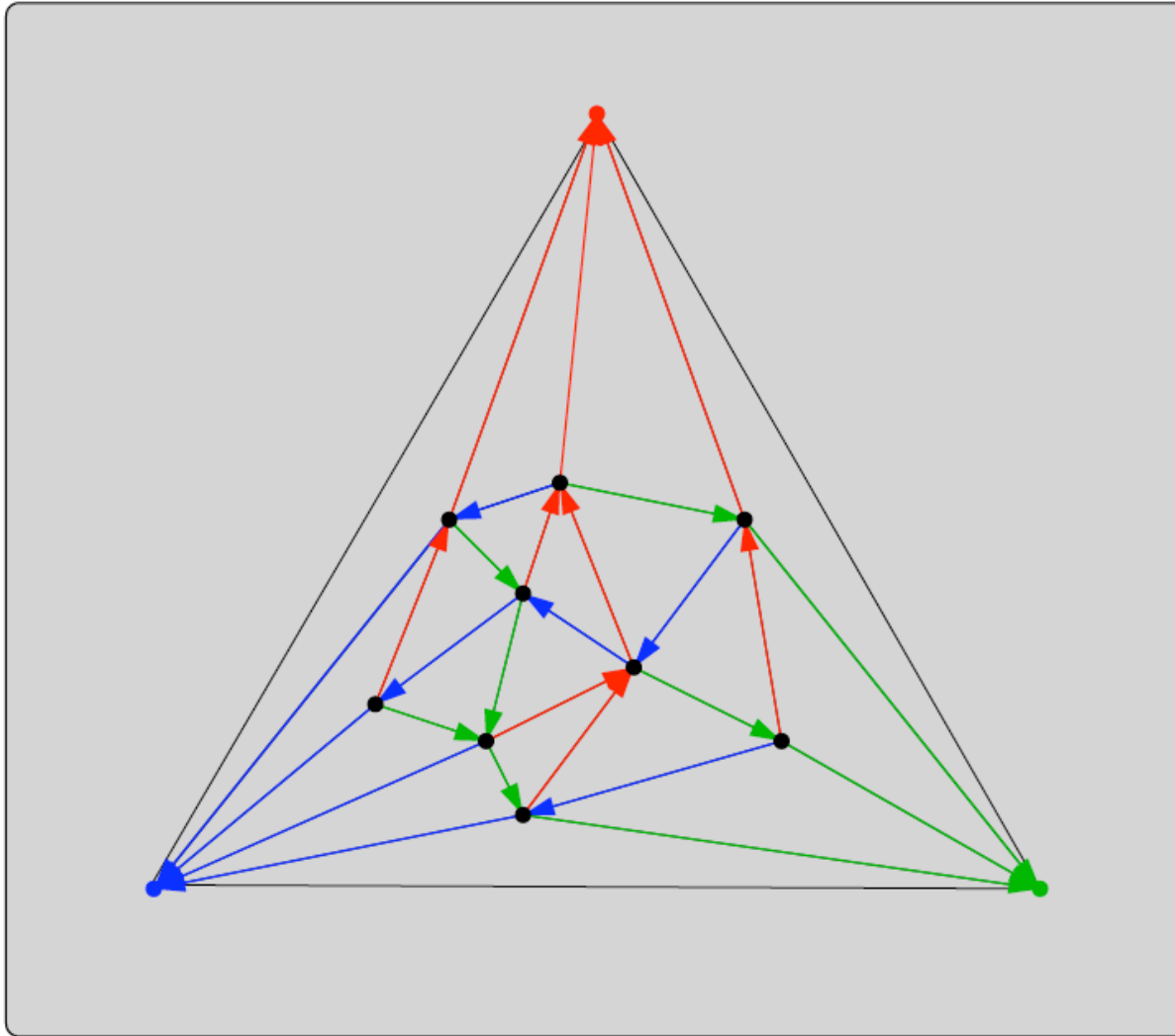
Epluchage -> Bois de Schnyder



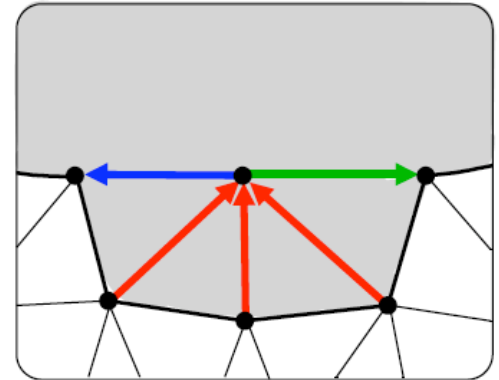
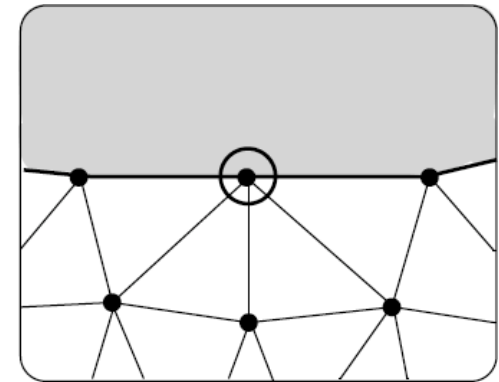
Chaque étape:



Epluchage -> Bois de Schnyder

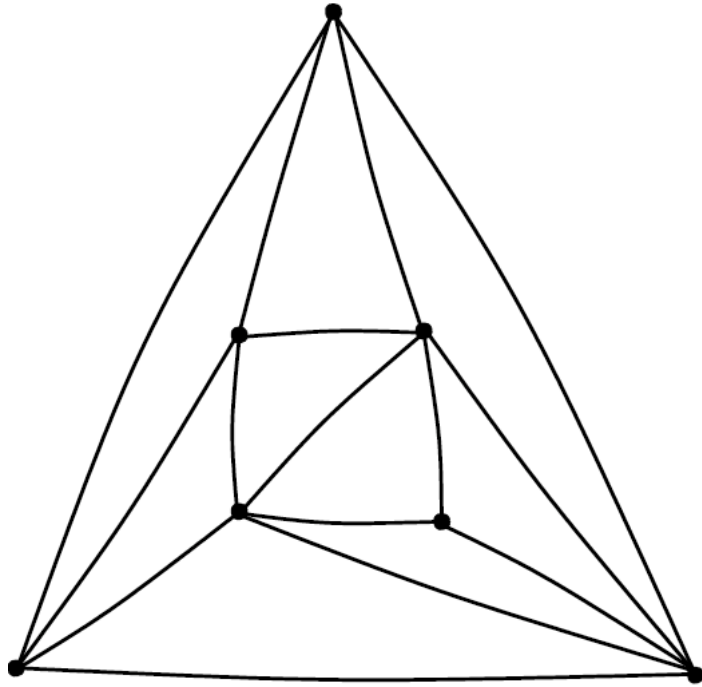


Chaque étape:



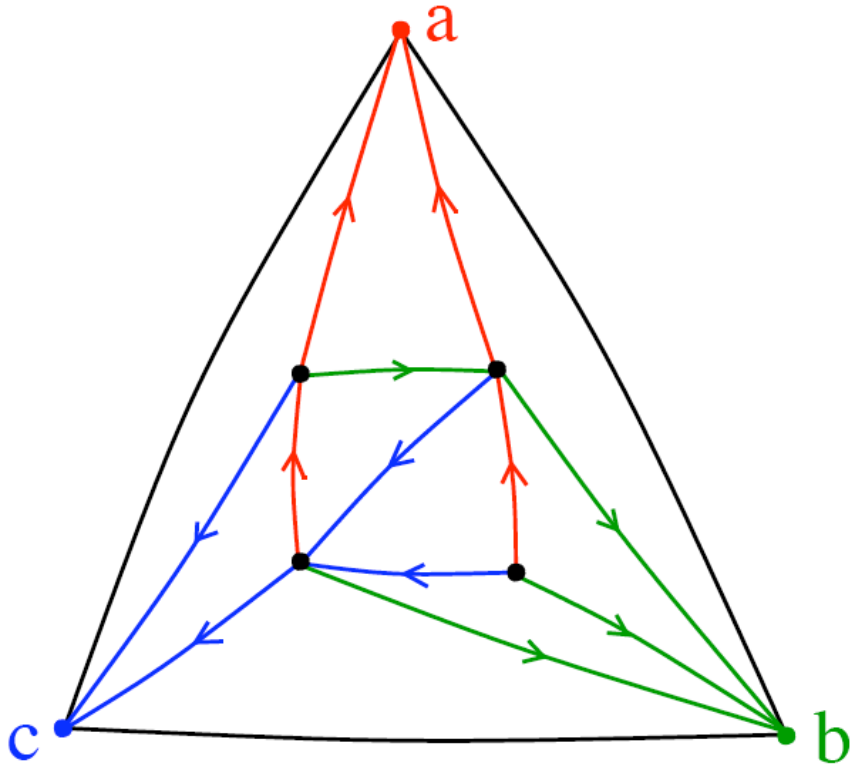
Dessin par comptage de faces

[Schnyder'90]:



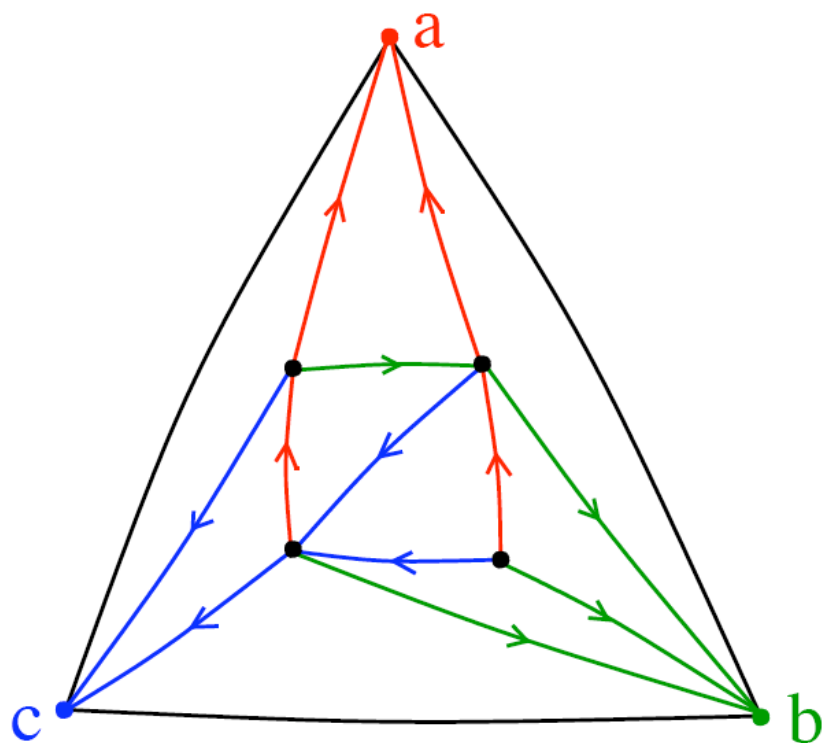
Dessin par comptage de faces

[Schnyder'90]:

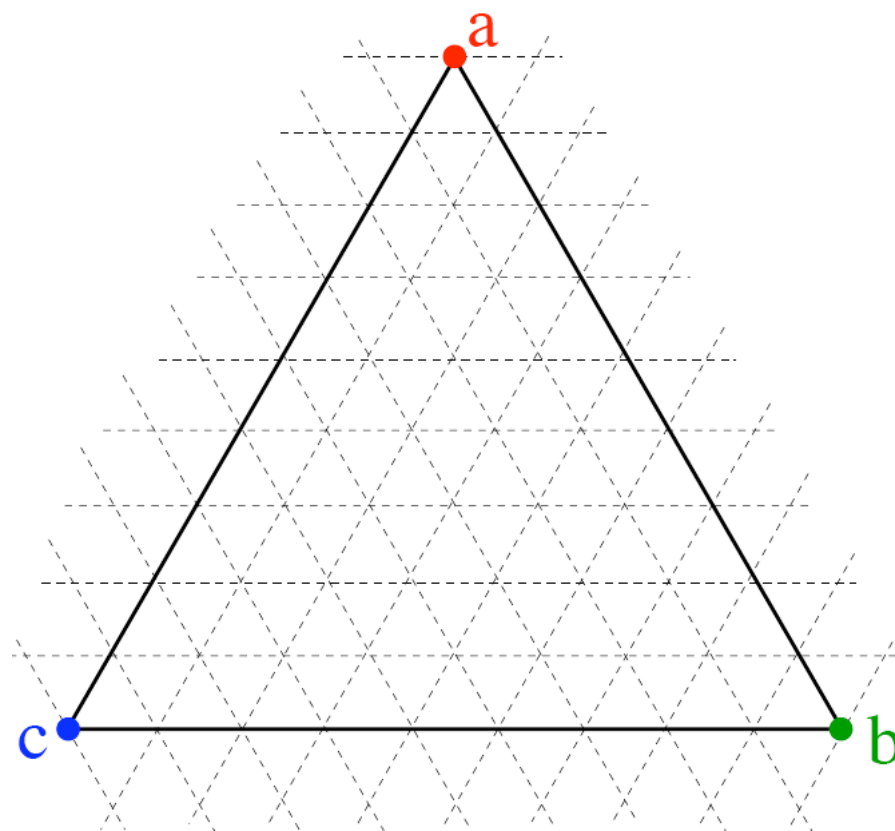


Dessin par comptage de faces

[Schnyder'90]:



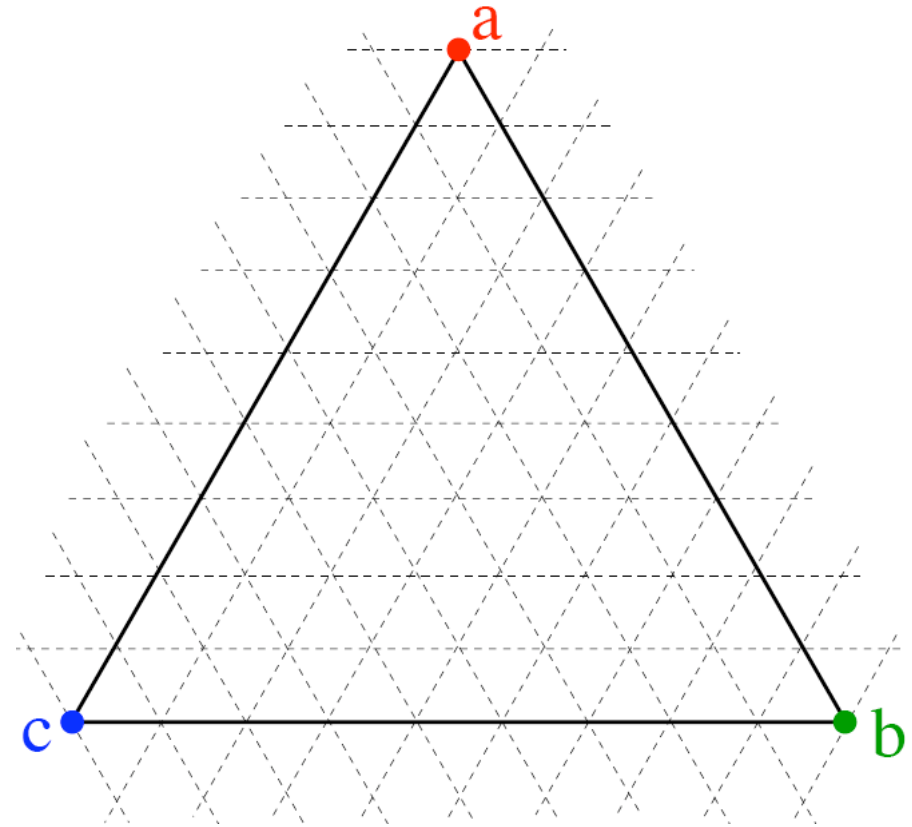
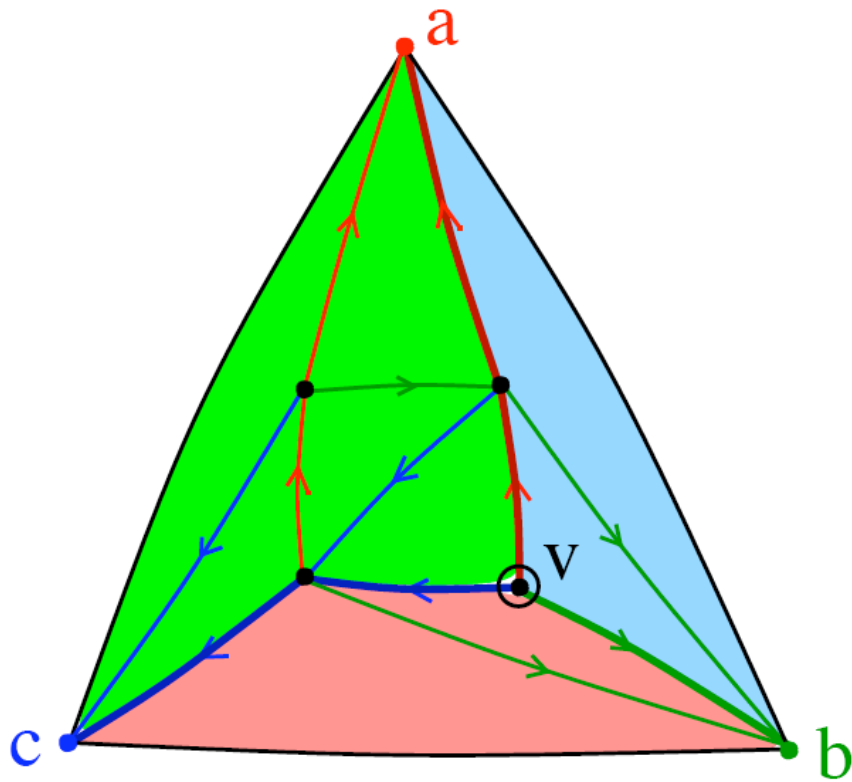
9 faces internes



Grille 9 x 9 x 9

Dessin par comptage de faces

[Schnyder'90]:



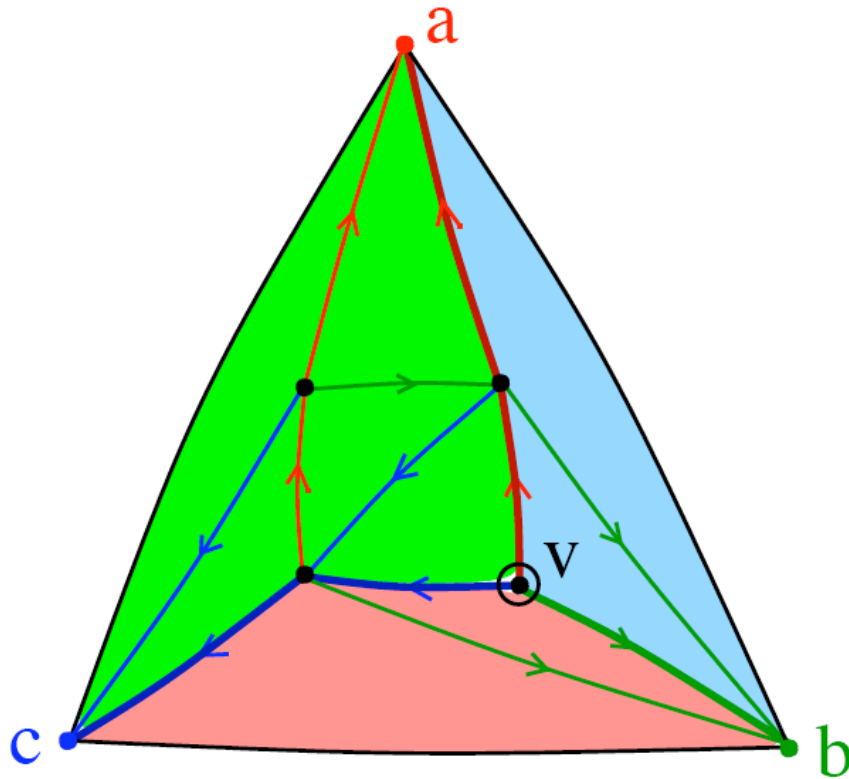
Zone rouge: 2 faces

Zone verte: 5 faces

Zone bleue: 2 faces

Dessin par comptage de faces

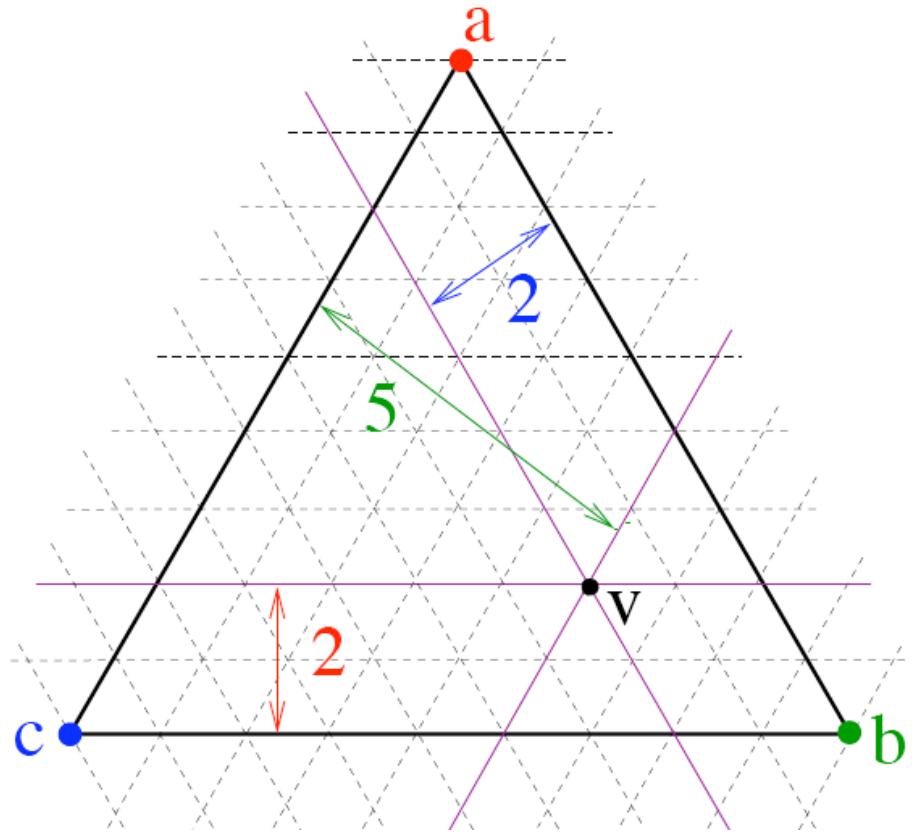
[Schnyder'90]:



Zone rouge: 2 faces

Zone verte: 5 faces

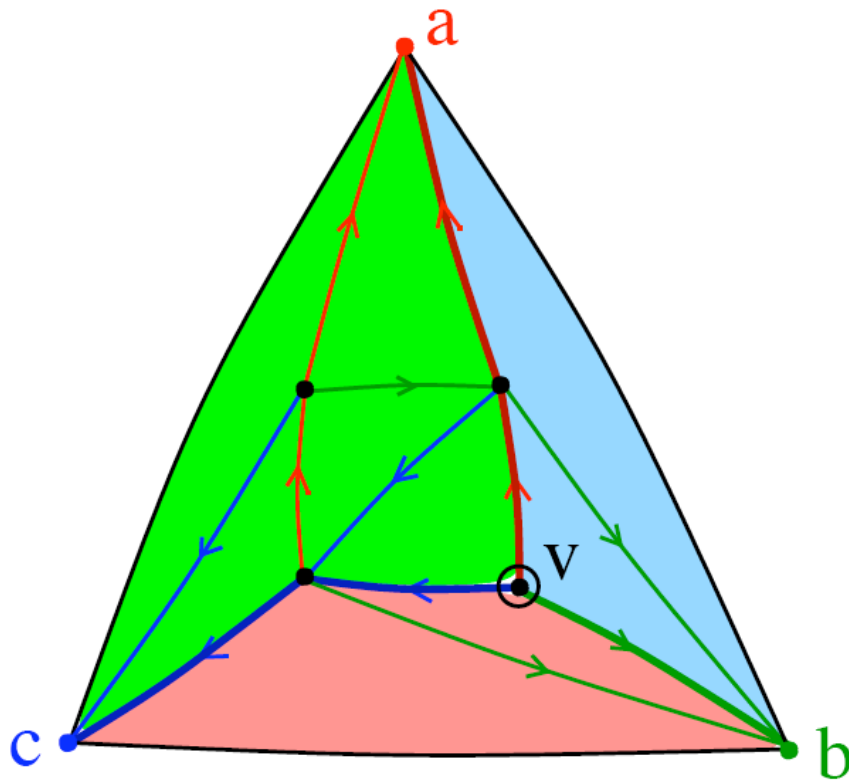
Zone bleue: 2 faces



Place v au barycentre
de $\{a, b, c\}$ avec poids
 $\{2/9, 5/9, 2/9\}$

Dessin par comptage de faces

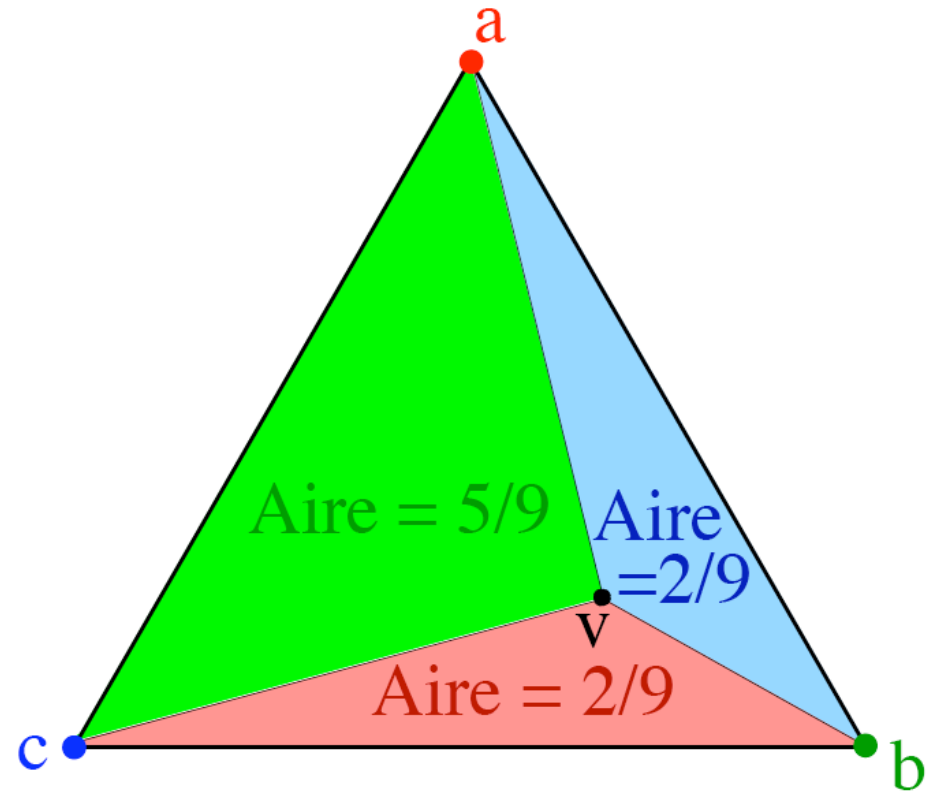
[Schnyder'90]:



Zone rouge: 2 faces

Zone verte: 5 faces

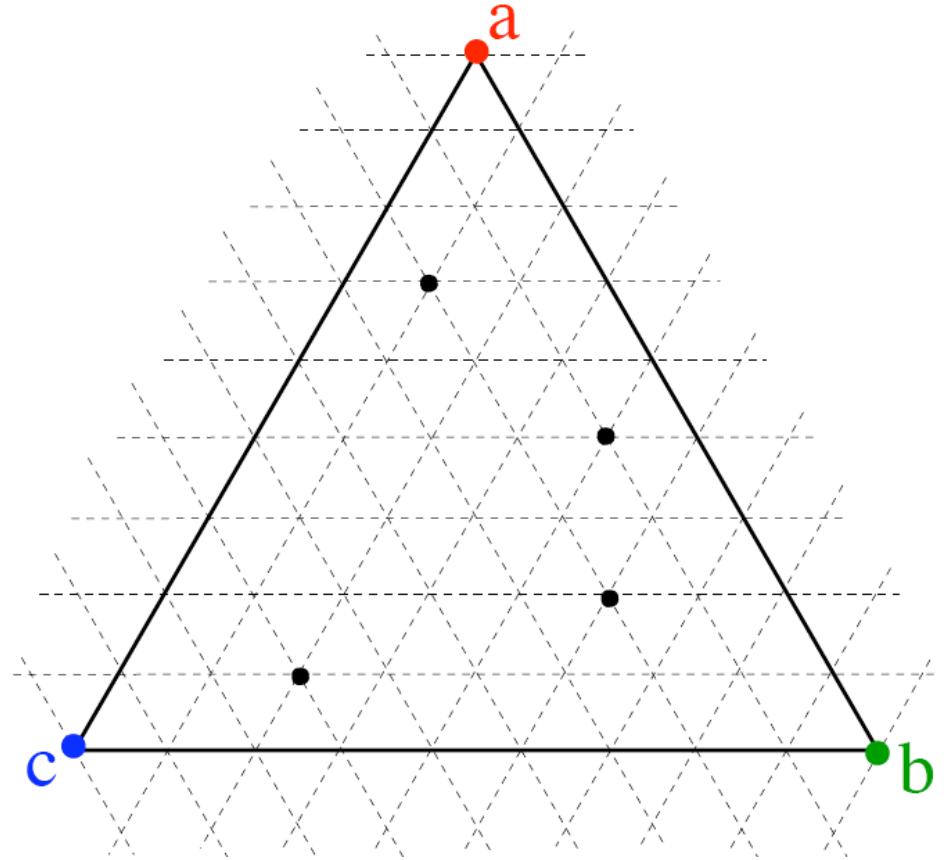
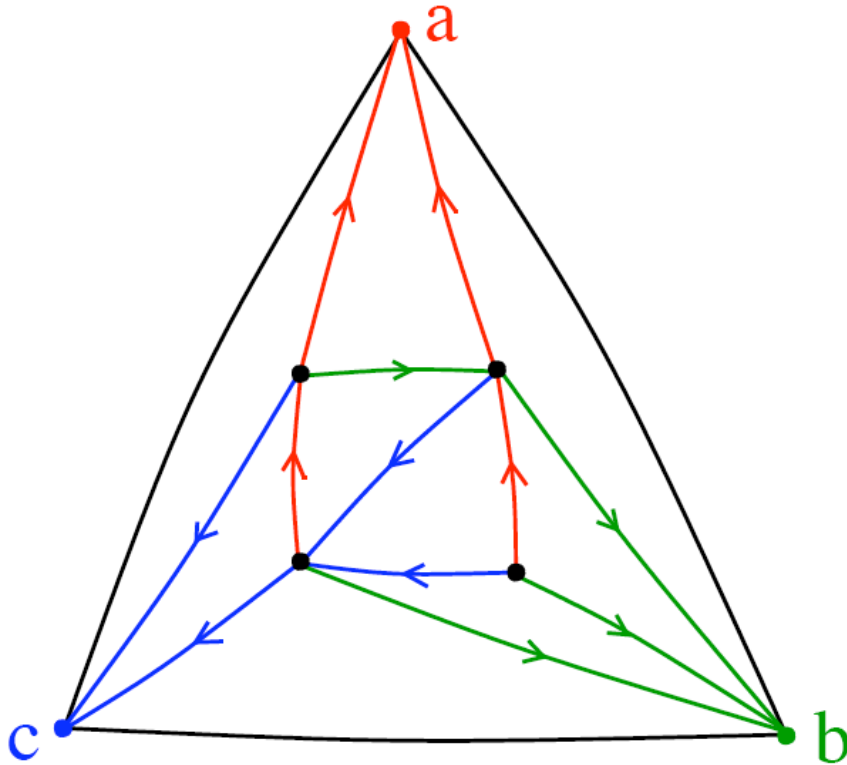
Zone bleue: 2 faces



Place v au barycentre
de $\{a, b, c\}$ avec poids
 $\{2/9, 5/9, 2/9\}$

Dessin par comptage de faces

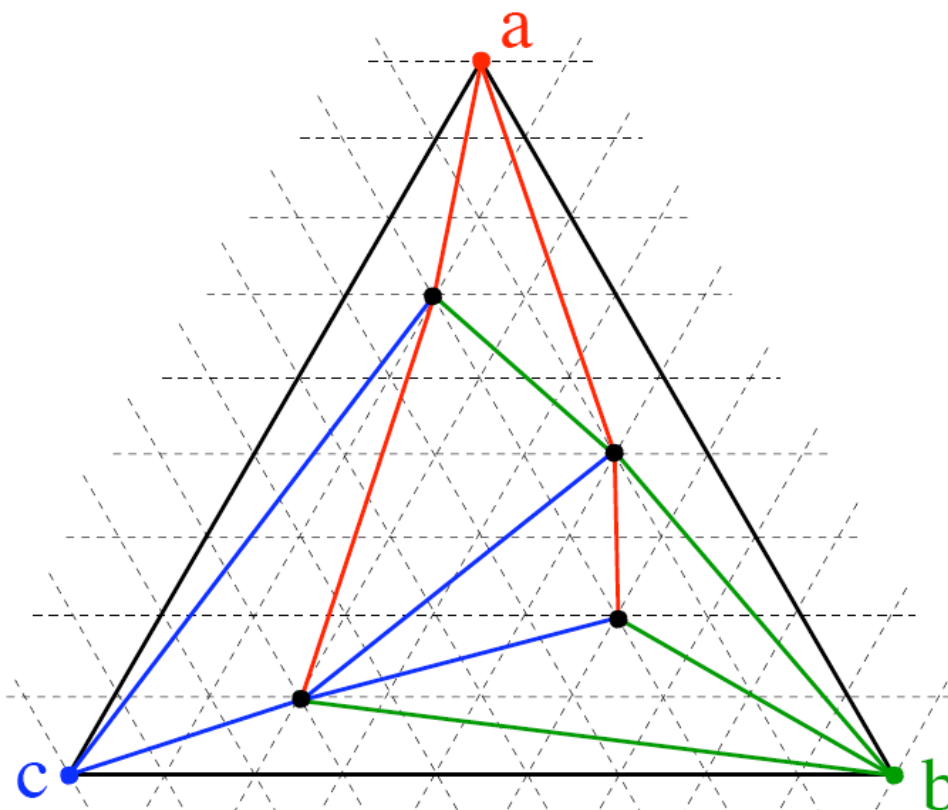
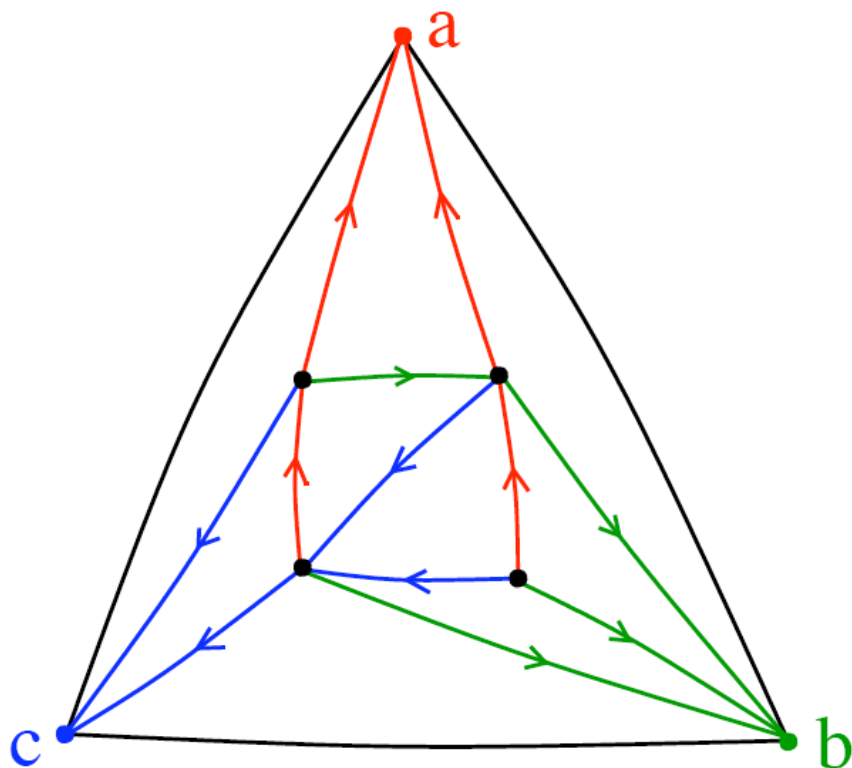
[Schnyder'90]:



Place les autres sommets
selon la même règle

Dessin par comptage de faces

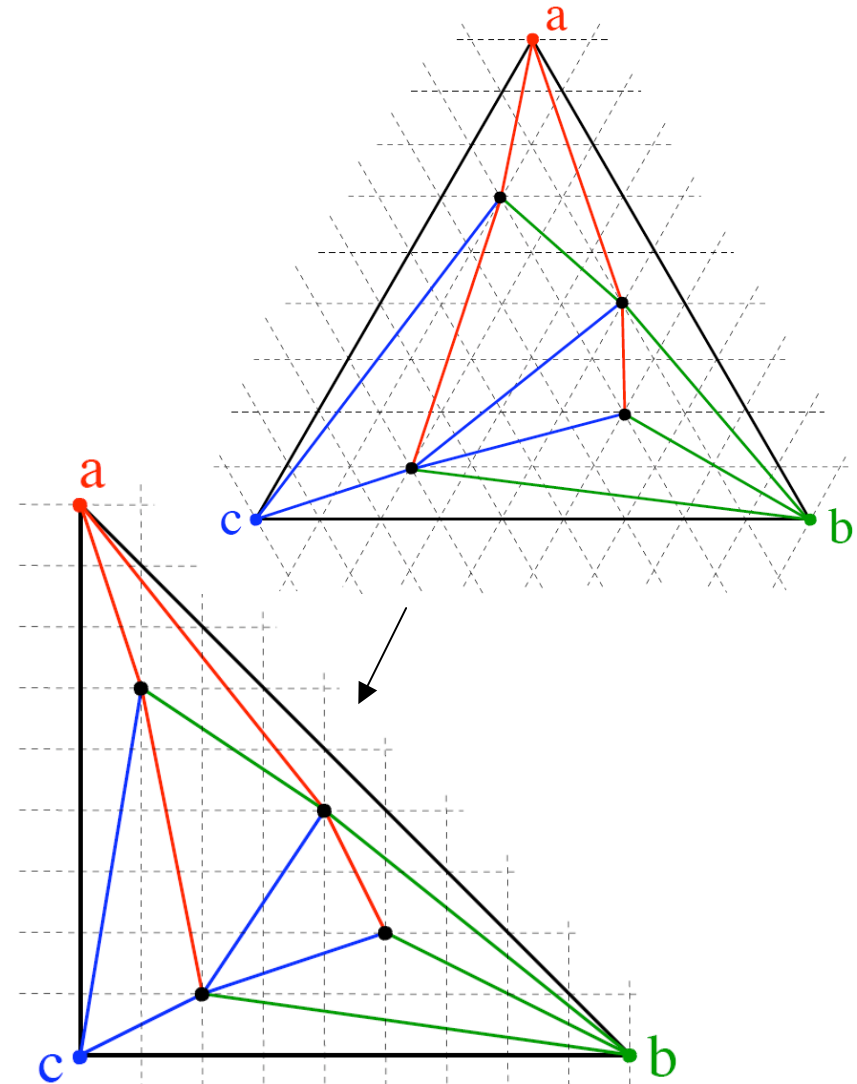
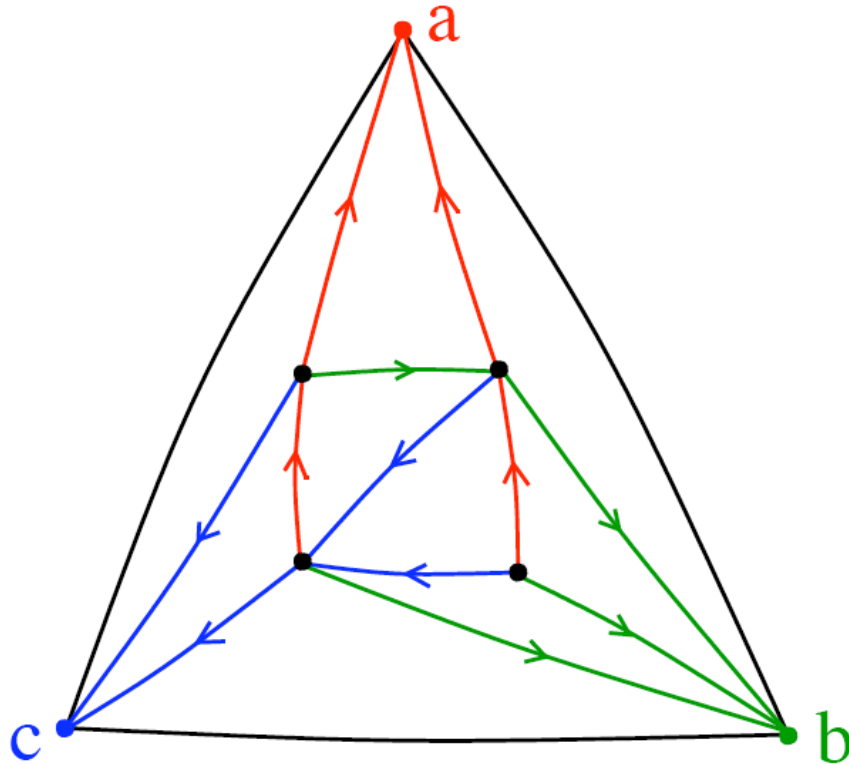
[Schnyder'90]:



Relie sommets adjacents
par des segments.

Dessin par comptage de faces

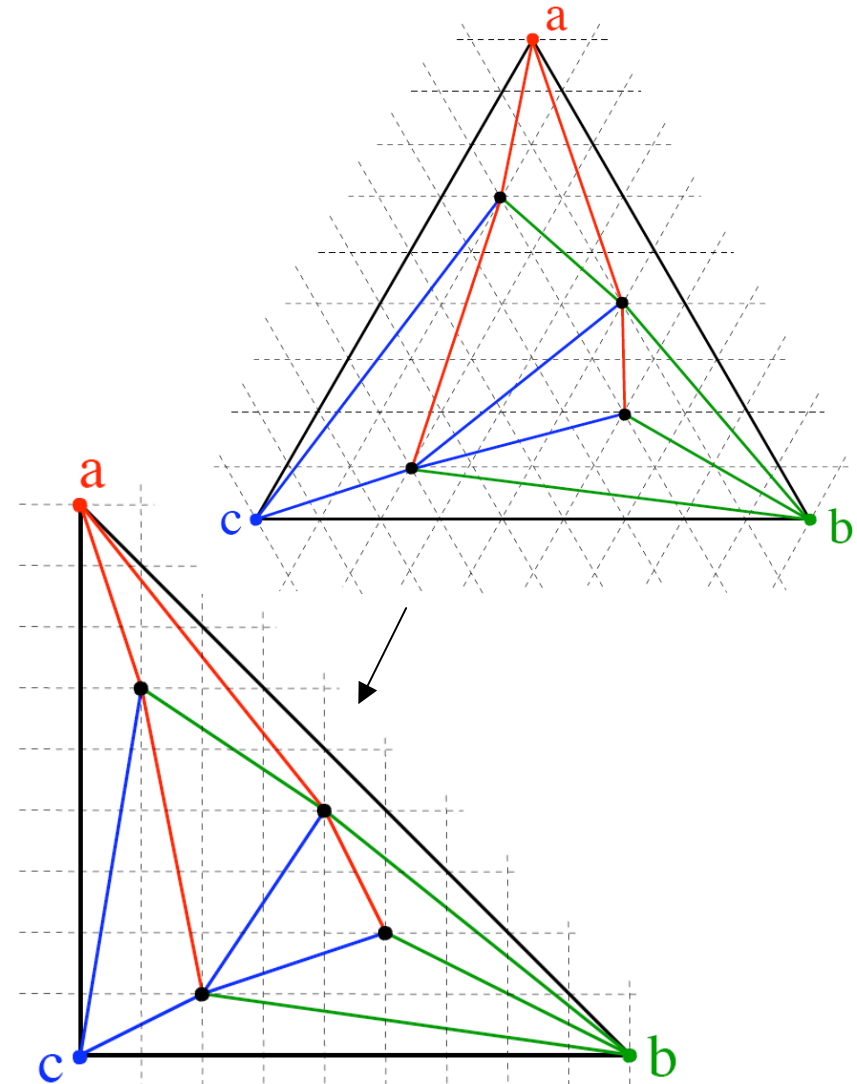
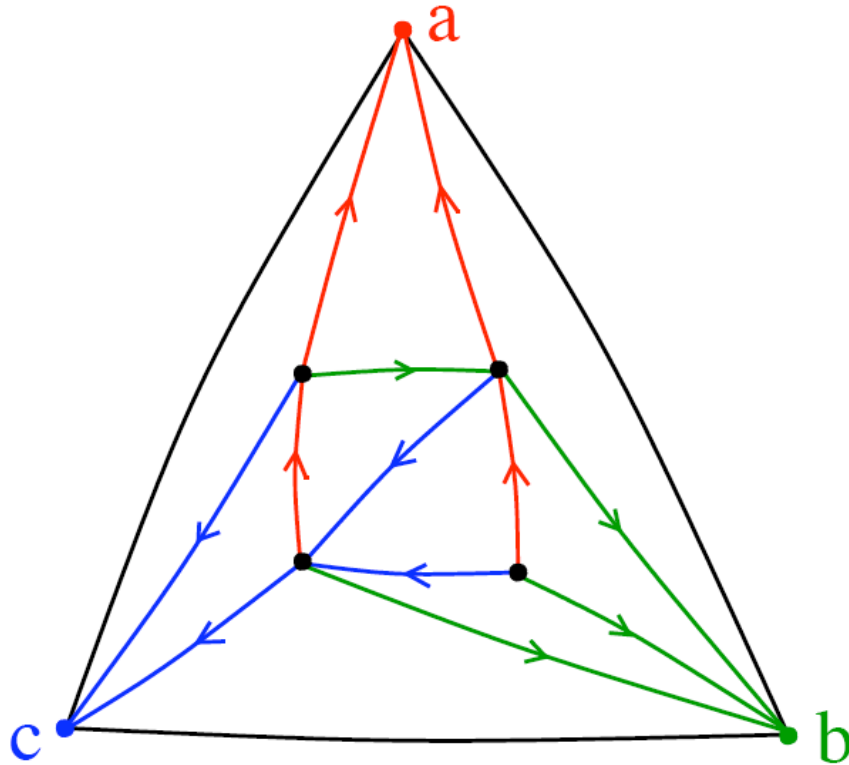
[Schnyder'90]:



Théorème [Schnyder'90]: Le dessin obtenu est **planaire**, les sommets placés sur la **grille régulière** $f \times f = (2n-5) \times (2n-5)$.

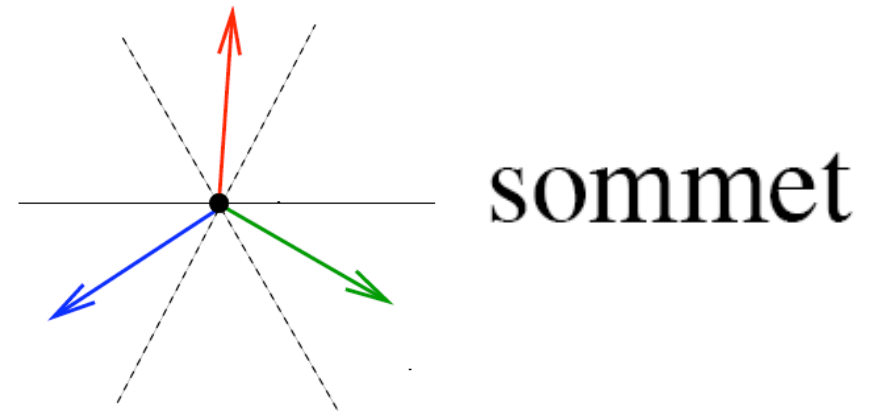
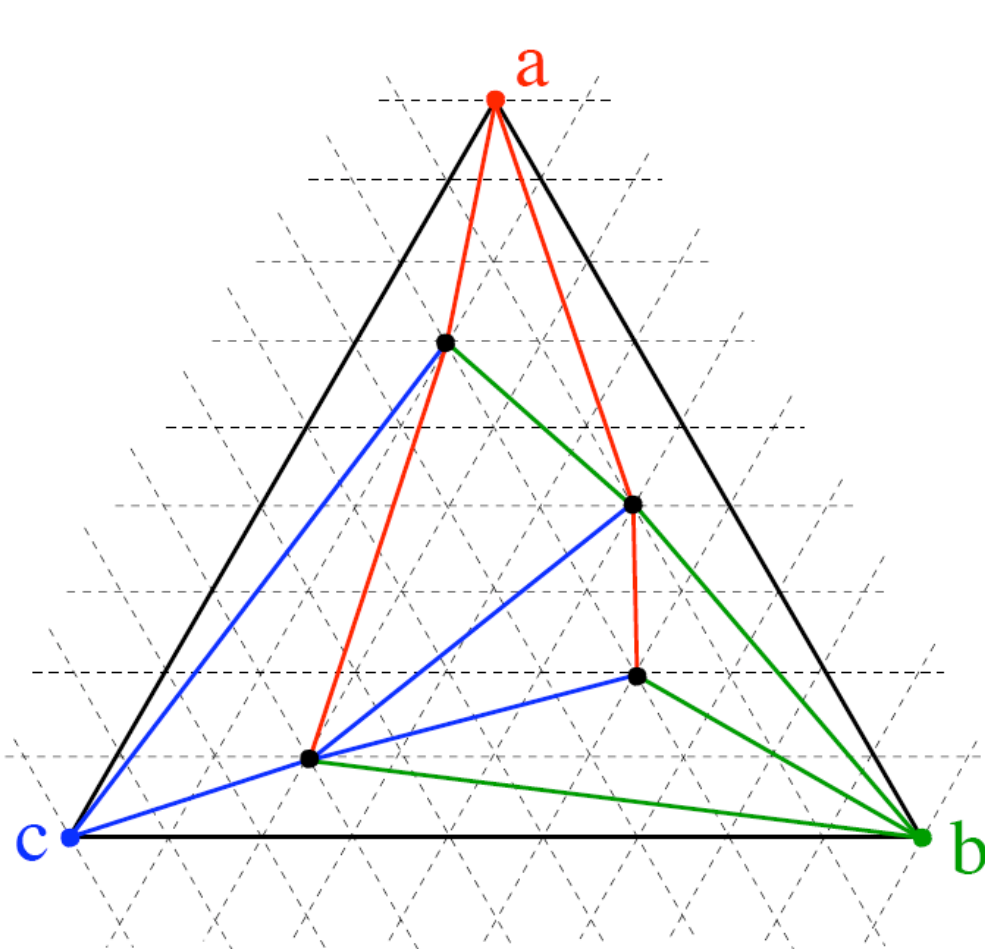
Dessin par comptage de faces

[Schnyder'90]:

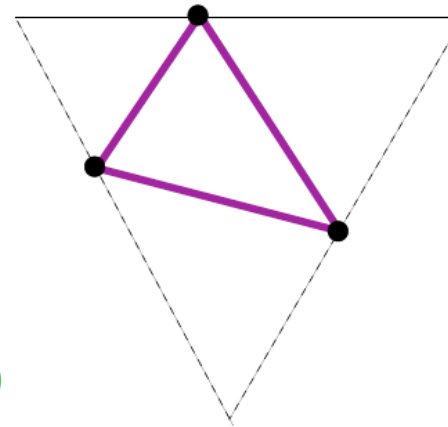


Théorème [Schnyder'90]: Le dessin obtenu est **planaire**,
les sommets placés sur la **grille régulière** $f \times f = (2n-5) \times (2n-5)$.
(peut obtenir $(n-2) \times (n-2)$ par comptage de sommets dans les zones)

Preuve de planarité

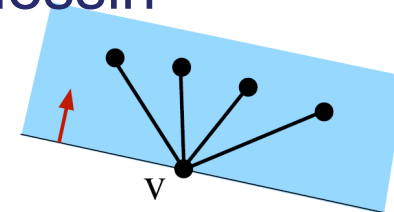


sommet



face

- Donc le dessin est planaire, car
 - chaque face n'est pas dégénérée sur le dessin
 - chaque sommet n'est jamais de la forme

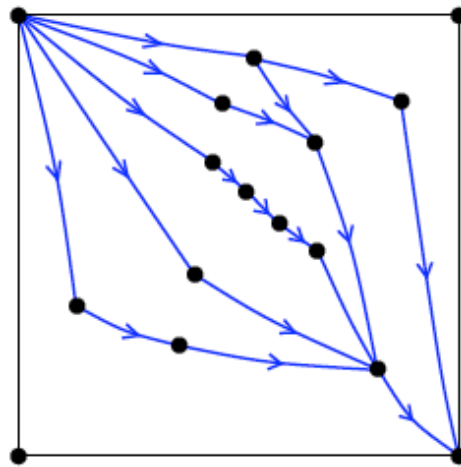
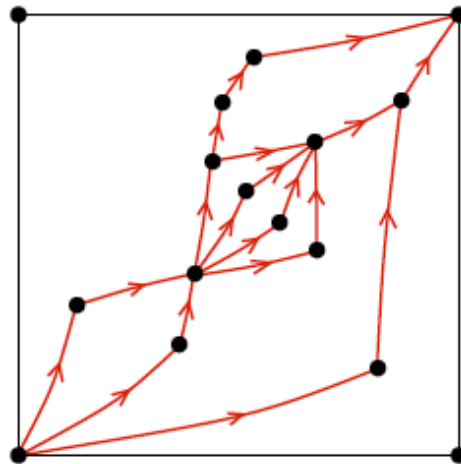
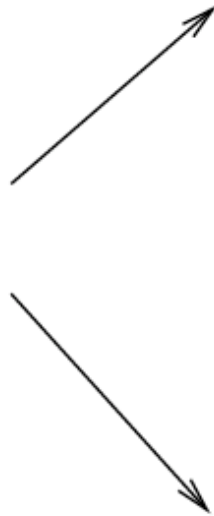
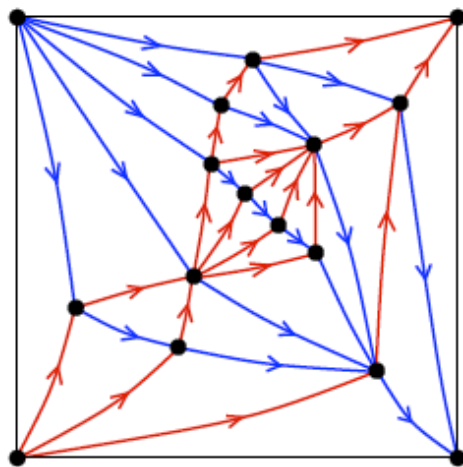


Partie III: autres algorithmes de dessin planaire par comptage de faces

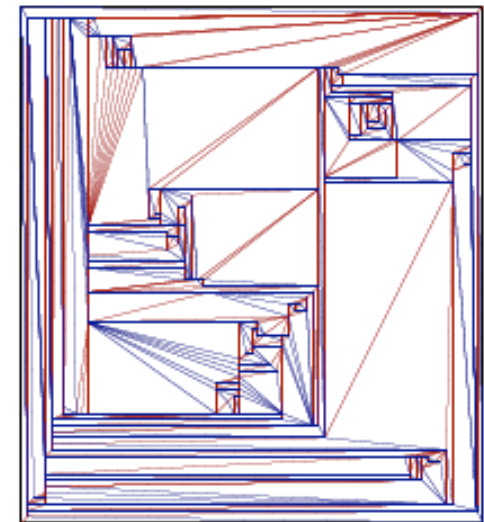
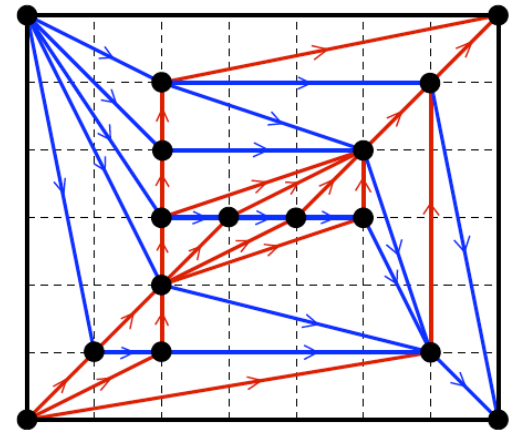
Triangulations irréductibles

[Fusy'05]

ABSCISSES



ORDONNÉES



Cartes 4-régulières

[Bernardi, Fusy'10]

